# XXIV Marató de Problemes

## 26 d'abril de 2020

Organitzadors: Oscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller, Miquel Ortega

## Bloc II - Per si els voleu explicar a la família

**64. La identitat de l'enginyer**

En Ce Xu s'ha encallat amb un problema i necessita ajuda. El problema demana demostrar que la integral

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 (1-x)^4}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

és estrictament positiva, i després trobar-ne el valor.

**130. Discretita**

L'Oriol Serra va descartar el següent problema per l'últim parcial de discreta perquè era massa fàcil. Sabríeu provar la següent identitat?

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r} = 2^{n-r}\binom{n}{n-r}.$$

**55. Tic toc**

En Ferran López sempre arriba tard i està buscant una bona excusa per a que no li fotin bronca. El seu rellotge té la busca dels minuts i la busca de les hores de la mateixa longitud, de manera que no es poden distingir. En quants moments al llarg del dia no li serà possible saber l'hora?

**112. Be dual**

En Bernat Plans ha deixat el següent problema com a "Okay, o si voleu exercici". El podríeu resoldre?

Siguin $V_i$, amb $i \in I$, subespais vectorials d'un cert $k$-espai vectorial $V$.

a) Suposem que $V = V_1 \oplus V_2$. És cert que $V^* \cong V_1^* \oplus V_2^*$?

b) Suposem ara que $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, on la suma directa per un conjunt (possiblement infinit) de subespais $V_i$ indica que tot vector de $V$ es pot expressar de forma única com a suma finita de vectors de $V_i$. És cert que $V^* \cong \bigoplus_{i \in I} V_i^*$?

*Nota:* En aquest problema, identifiquem $V_i^*$ amb el subespai vectorial de $V^*$ de funcions que s'anullen fora de $V_i$, en el sentit que si $v = \sum_{j \in I} v_j$ (amb $v_j \in V_j$) té $v_i = 0$, llavors $f(v) = 0$.

**226. Coneixeu "Un teorema cada dia"? Hi trobareu la solució a aquest problema.**

L'Amadeu s'ha vestit de cani, us treu la navalla i us exigeix de males maneres que proveu que, donada una col·lecció finita de punts al pla ($\mathbb{R}^2$), o bé estan tots alineats, o bé existeix una recta que només en conté dos.

**454. Qué primos!**

La Carlota i en Marcel són cosinets, però com són una mica primos necessiten ajuda per resoldre el següent problema:

a) Sigui $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que si $2^n - 1$ és un nombre primer, aleshores $n$ ha de ser primer.

b) Sigui $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Demostreu que si $2^n + 1$ és un nombre primer, aleshores $n$ ha de ser una potència de 2.