

# XXIV Marató de Problemes

27 d'abril de 2020

Organitzadors: Oscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller, Miquel Ortega

## Bloc III - Més fàcils que Càlcul I

### 163. VAP VEP VIP VOP VUP

L'Oriol Navarro té una matriu  $A$ , obtinguda de permutar les columnes de la matriu identitat de mida  $n$ . Quins són els seus VAPs i VEPs?

### 328. La història és cíclica

En Pau Redón va prémer un botó que deia “Cíclicas aquí, te sorprendrà!” i li va sortir el següent problema:

- És cert que si tots els subgrups propis d'un grup són cíclics, aleshores el grup és cíclic?
- Demostreu que un grup finit d'ordre  $n$  té exactament un subgrup d'ordre  $d$  per a tota  $d|n$  si, i només si, el grup és cíclic.

### 121. Cambio radical

En Salvador Roura va ser qualificat de “golphista radical” pels seus detractors quan va definir la funció radical sobre els enters positius com:

$$\text{rad}(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ primer}}} p.$$

A més, va conjecturar que si  $a, b, c$  són enters positius, coprimers dos a dos i tals que  $a + b = c$ , aleshores:

$$c < \text{rad}(abc)^2.$$

Estava a punt de demostrar l'Últim Teorema de Fermat a partir d'aquesta conjectura, però els sectors pro-reescalament del deganat el van silenciar abans. Podríeu acabar la demostració (assumint que la conjectura és certa)?

### 244. Com Hattori el Ninja

L'Àlex Comas té el següent problema. Sigui  $\left( a_i \right)_{i=0}^{\infty}$  una successió de reals estrictament positius.

Proveu que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty.$$

És cert el recíproc?

#### 490. Flipant en colors

Durant la quarantena, la generació de Festes del 2000 (un minut de silenci per FMEstes99) està començant a triar els colors de la seva samarreta de l'any que ve. Tenen  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  colors diferents i pinten cada punt del pla ( $\mathbb{R}^2$ ) d'un color d'entre els  $k$  colors diferents. Han decidit que quan algú trobi un rectangle amb els quatre vèrtexs pintats del mateix color, agafaran aquell color per la samarreta de festes. Però existeix tal rectangle?

#### 175. Desigualtat triangular

En Barrero està molt emocionat i diu en veu alta "Let me to consider a much interesting problem that comes to my mind". El problema diu el següent: "Anomenem  $S$  l'àrea d'un triangle i  $P$  el seu perímetre. Trobeu la mínima constant  $\gamma$  que fa la inequació  $S \leq \gamma P^2$  certa per a tot triangle del pla afí." Sabríeu resoldre el problema?