

# XXIV Marató de Problemes

28 d'abril de 2020

Organitzadors: Oscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller, Miquel Ortega

## Bloc IV - Passem l'equador!

### 352. Tot o res

L'Eduardo Simón i en Ferran Hernández han iniciat un debat al grup de PIKI-PIKI basat en la dialèctica i el respecte mutu sobre les següents qüestions:

- És possible trobar un endomorfisme d'un  $k$ -espai vectorial tal que tots els elements de  $k$  siguin valors propis?
- I un endomorfisme d'un  $k$ -espai vectorial de dimensió finita que no tingui cap valor propi? I si  $k = \mathbb{C}$ ? I si la dimensió és infinita (amb  $k = \mathbb{C}$ )?

### 706. On s'amaguen els nostres complexos?

En Juanjo Rué va proposar el següent problema a classe de Complexa: Sigui  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  un polinomi a coeficients complexos.

- Sigui  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Trobeu  $P(w) + P(w^2) + \dots + P(w^n)$ .
- Sigui  $P_k$  el polinomi format pels termes de grau múltiple de  $k$  de  $P$ . Demostreu que

$$\sup_{|z| \leq R} |P_k(z)| \leq \sup_{|z| \leq R} |P(z)|.$$

Quan va acabar la resolució, va afirmar "No estem descobrint la sopa d'all. Conveng?". I vosaltres, què creieu, s'ha de descobrir la sopa d'all per resoldre el problema?

### 1414. Dunkin Donuts

L'Arnau Padrés ha començat a fer topologia i va una mica perdut amb això dels donuts i les tasses de cafè. Per practicar, enganxa dos donuts i dibuixa amb un retolador un cercle al voltant d'un dels dos forats. El podeu ajudar a deformar el donut (homeomorfament, és clar) de manera que el cercle passi a englobar els dos forats?

### 2830. L'imitació

L'Iñaki viu al límit i ha perfeccionat les seves imitacions del professorat de Càlcul 1. Ara bé, tan bé no els imitarà si no sap resoldre el límit següent!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2 + \dots + n^n}{1^n + 2^n + \dots + n^n}.$$

Podríeu ajudar-lo?

### 955. Un problema una mica dens

L'Oriol ha llençat un problema a la resta de companys al crit de "Ahí Baeza!". El problema diu el següent: determineu si existeixen infinits enters positius  $n$  tals que  $\pi(n)|n$ , on  $\pi(n)$  és el nombre de primers menors o iguals a  $n$ .

### 1912. Mà esquerra, mà dreta

L'Enric Ventura vol posar en un tauler d'escacs convencional un rei i  $n$  cavalls, de manera que cap peça amenaci cap altra peça. Vol saber quin és el màxim nombre  $n$  de cavalls que hi pot posar. La seva mà esquerra diu "Me cagun l'hòstia merda, si està clar que ha de sortir això"; però la seva mà dreta no sap resoldre el problema. El podríeu ajudar? (fent servir la mà dreta, és clar)