

XXIV Marató de Problemes

29 d'abril de 2020

Organitzadors: Oscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller, Miquel Ortega

Bloc V - Comença la diversió

649. Tanqueu la porta, si us plau!

S'apropen els exàmens i l'Oscar Benedito ha anat a estudiar al CFIS n dies (i com que és molt aplicat, $n \geq 3$). Cada dia, apunta en un paper el número de cops que diu "Tanqueu la porta, si us plau!". Avui s'ha adonat que aquests nombres són tots primers i que formen una successió aritmètica. Increïble! El podeu ajudar a demostrar que la diferència entre els elements de la successió és divisible per tot primer $p < n$?

1300. Los Javis

L'Heredia afirma que tot conjunt S tancat per una operació $*$: $S \times S \rightarrow S$, on $(a * b) * a = b$ per a tot $a, b \in S$ satisfà també que $a * (b * a) = b$ per a tot $a, b \in S$. En López-Contreras entra enfollit bramant que el docent és un mal matemàtic i se'n va cap al despatx de la cap d'estudis. Quin dels Javis té raó?

445. Un puntito en la boca

En Xavier Cabré afirma que amb l'educació pèssima que heu rebut, no sereu capaços de provar que si teniu un conjunt de punts aïllats $S \subset \mathbb{R}^n$ (en la topologia ordinària), aleshores $|S| \leq |\mathbb{N}|$. Seríeu capaços de demostrar que no té raó i posar-li "un puntito en la boca"?

892. Agafeu regle i compàs...

En Guillem Coderch et ve un dia i et diu "Eh tiu, tiu, he trobat un problema per internet que m'ha volat el crani. Si vols, anem a fer un pim-pom ràpid i després te l'explico.". El problema és el següent:

"Donat un triangle agut qualsevol, i utilitzant únicament regle i compàs (i un llapis), construïu la circumferència que passi pels tres punts mitjos de cada costat del triangle."

En Guillem diu que fer la construcció no és molt difícil, així que us proposa fer-ho en el mínim nombre de moviments (moviment = traçar recta o circumferència). Sabreu fer-ho? Ell afirma que es pot fer en 9 moviments!

1786. Fita i Fitipaldi

En Rafah és un apassionat dels conjunts fitats (potser per això últimament es fa dir "Rafitah"). Ara bé, quan els conjunts són no fitats, se li ennuvola la vista i no aconsegueix veure res (potser necessita unes "gafitas"). El podeu ajudar amb les següents qüestions?

- És cert que en \mathbb{R}^n tot conjunt convex no fitat conté una recta?
- I una semirecta?

607. Algoritmo no pare no pare

L'Amàlia Duch està intentant resoldre un problema d'Algorísmia, però no para de dijkstreure's perquè en Jan prem les tecles del seu ordinador massa fort. Podeu ajudar-la a resoldre el següent problema?

Sigui k un enter positiu i sigui K_n un graf complet d' n nodes, les arestes del qual tenen pesos que satisfan la desigualtat triangular. Considerem un conjunt X de vèrtexs del graf de mida $|X| = k$, que minimitzi la màxima distància entre X i els vèrtexs de K_n . Anomenem d^* a aquesta distància. Considerem, d'altra banda, l'algoritme que, partint d'un conjunt Y que només conté un vèrtex qualsevol de K_n , afegeix iterativament a Y el vèrtex de K_n més llunyà a Y , fins que $|Y| = k$. Anomenem d a la màxima distància entre Y i els vèrtexs de K_n . Proveu que

$$d \leq 2d^*.$$