

XXIV Marató de Problemes

30 d'abril de 2020

Organitzadors: Oscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller, Miquel Ortega

Bloc VI - Si enteneu l'enunciat, ja està bé

1216. No me vas a hacer el feo!

L'Ernesto avui surt de festa i, com sempre, li tocarà comprar l'alcohol per tothom. En total n persones sortiran de festa i l'Ernesto comprarà m ampolles d'alcohol. Ara bé, com que l'Ernesto sempre es passa tres pobles amb l'alcohol i t'acaba pressionant per a que beguis amb expressions del tipus "Otro chupito de pacharán, no me vas a hacer el feo!", la resta de gent decideix posar les normes següents: de cada ampolla en beurà un nombre senar de persones i donades dues ampolles diferents, un nombre parell de persones beuran de totes dues ampolles. Podeu demostrar que hi haurà com a molt una ampolla per persona (o sigui $m \leq n$)?

2434. Un moment de desconexió

A Càlcul II, el Rubén i l'Amanda han après què vol dir que un conjunt sigui connex. A més, certa senyora esclava els ha dit que si una funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ és contínua, injectiva, i no fitada als raigs positiu i negatiu, aleshores el complementari de la imatge pot ser connex. El Rubén diu que "Joder, està clar que no" i l'Amanda diu que "heavy que sí". Qui dels dos té raó? I, ja posats, pot ser arc-connex?

823. Pensament racional

Avui en Donato estava pensant un problema a classe de Química i s'ha quedat adormit. El problema demanava provar que qualsevol nombre racional positiu es pot expressar com a quocient de productes de factorials de nombres primers. Sabríeu provar-ho (sense quedar-vos adormits)?

1648. Entrena ments

En Miquel està pensant un problema en un entrenament del Roura. Quan pensa els problemes, sempre fa passes erràticament movent-se per la sala i no s'atura fins que ha trobat la solució del problema. A més, té la mania d'alternar amb quina cama comença les passes: dreta, esquerra, dreta, esquerra... i només pot acabar quan ha començat el mateix nombre de passes amb la dreta que amb l'esquerra (si no, quedaria descompensat i li entraria TOC). A més, en Miquel necessita fer almenys una passa (de fet, almenys dues perquè després haurà de fer-ne una altra amb l'altra cama) per poder trobar la solució d'un problema (i si no resol problemes, el Roura no el deixa berenar).

Podem imaginar la sala com una quadrícula infinita amb en Miquel al centre. En total fa $2n$ passes ($n \geq 1$) i a cada instant es pot moure equiprobablement amunt, avall, a la dreta o a l'esquerra. Proveu que la probabilitat que en Miquel acabi a dues o menys passes d'on ha començat es pot expressar com $\frac{a^2}{b^2}$ amb $a, b \in \mathbb{N}$.

3298. Caminar és molt saludable

En Pifa ha sortit a passejar pel bosc per prendre l'aire. Com és un expert en això de donar voltes, sap que si són simètriques respecte casa seva i acaben allà on comencen són molt més maques. Formalment, el seu recorregut ha traçat una corba simple, tancada i simètrica respecte l'origen. Proveu que existeixen quatre punts on ha estat el Pifa durant la seva volta que formen un quadrat.

1111. Quan la carrera era difícil

L'Óscar Rivero troba a faltar l'antiga llicenciatura, argumentant que “Ahora los problemas son tan fáciles que cuando se los cuento a mi abuela, se me queda dormida!”. Repassant exàmens de l'antiga llicenciatura, es troba amb un examen parcial d'Anàlisi Complexa, en què un problema venia amb la següent indicació:

Observació: aquest problema pot resultar difícil. Indiqueu al menys quin camí seguiríeu.

Sereu capaços de resoldre'l? El problema demana demostrar que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}}$$

és divergent.