

# XXIV Marató de Problemes

1 de maig de 2020

Organitzadors: Oscar Benedito, Jordi Castellví, Iñaki Garrido, Martí Oller, Miquel Ortega

## Bloc VII - No ploreu

### 2224. Més dura serà la caiguda

En Samu li ha agafat el gustet a això de trencar quadres. Vol dissenyar un sistema per penjar un quadre amb una corda i dos claus, de manera que si treu un clau qualsevol el quadre caurà. Sabríeu fer-ho? I amb 3 claus, de manera que eliminar un clau qualsevol faci caure el quadre? I amb  $n$  claus?

### 4450. Quedant-nos a mitges

A en Dani Vilardell li està costant això de la diferenciabilitat i la derivabilitat. L'Óscar Rivero li ha dit que tot plegat és molt fàcil, que només cal entendre bé el següent operador:

$$D^{\frac{1}{2}}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

per a  $f$  suficientment diferenciable. Podríeu ajudar-lo a calcular  $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}f(x))$ ?

### 1495. Problemes d'identitat

En Pep Burillo ha posat un nou entregable, que diu el següent:

“Sigui  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una bijecció satisfent que:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$

per a tot  $x, y \in \mathbb{R}$ . Demostreu que  $f(x) = x$ ”

L'Àngela està tenint alguns problemes per resoldre l'entregable, la podeu ajudar?

(Bastant) més tard, arriba el Gimó i afirma que el resultat també és cert si se substitueix la segona condició per  $f(1) = 1$ . Té raó?

### 2992. Si realment t'ho proposes, ho aconseguiràs

La Míriam té unes tises noves i ha decidit estrenar-les. A més, últimament està llegint molts missatges inspiradors de Mr. Wonderful i creu que “Les úniques barreres als seus somnis són les mentals”. La Míriam té un full DIN A4 (on els costats estan en proporció  $1: \sqrt{2}$ ) i s'ha proposat tallar-lo en un nombre finit de quadrats. Podríeu demostrar que no ho podrà aconseguir mai i trencar així les seves il·lusions?

### 1009. Un problema molt interessant

En Jordi Rodríguez ha trobat un problema molt interessant i ha anat ràpidament a explicar-li a la seva amiga Patri. S'ha endut una decepció en sentir la seva resposta: “Nen, un moment, en quin moment se t’ha passat pel cap que m’importa el que m’estàs dient? T’ho dic molt en serio, tu i jo deixarem de ser amics”. El problema és el següent:

Sigui  $f(n)$  el nombre de subconjunts de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tals que els seus elements sumen 0 a  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (incloent el conjunt buit). Demostreu que:

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ senar}}} \varphi(d) 2^{n/d},$$

on  $\varphi(d)$  és la funció  $\varphi$  d’Euler.

### 2020. Per fi s’acaba!

L’Omar (àlies Fibonazi) és superfan de les seqüències de nombres. Vol demanar-li ajuda a la Martina Colas per trobar quina seqüència segueix la numeració dels problemes de la Marató, però tem per la seva salut auditiva. El podeu ajudar vosaltres?