

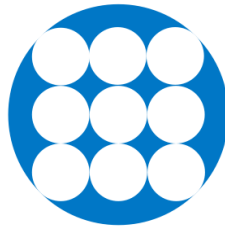
# XXV Marató de Problemes

3 de Maig de 2021

## Bloc I - Sou més espavilats que els de telecos?

### 1. XiQuest?

Tradicionalment, el primer problema de la marató era sobre el logo de la UPC. Com que el nou candidat a rector, Daniel Crespo, és molt fan d'aquest logo, ha decidit convidar a un esmorzar magnífic a tot aquell capaç de calcular l'àrea blava del següent logo comprimit, sabent que l'àrea d'un cercle blanc és 1. Us ho perdreu?



### 3. Bolsa no, gracias

El Donato, que està molt preocupat pel medi ambient, sempre porta una bossa de tela quan va a comprar al Carrefour Express. Tot i això, el caixer sempre li pregunta: “Quiere bolsa, amigo?”. Amb el temps que ha hagut de dedicar a respondre: “Bolsa no, gracias”, podria haver resolt el següent problema:

Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funció derivable, no necessàriament  $\mathcal{C}^1([a, b])$ . Proveu que, si  $f'(a)f'(b) < 0$ , aleshores existeix  $\xi \in (a, b)$  tal que  $f'(\xi) = 0$ .

### 4. ¡Hola Artemaníacos!

Mentre en Francesc Planas resolvia un problema a la pissarra, ha escoltat que els alumnes comentaven que s'assemblava a "el cabezón" d'Art Attack. En sentir-ho, en Francesc s'ha quedat de pedra i de l'enrabiada que ha agafat, ha decidit que no acabaria de resoldre el problema, que demanava calcular el determinant de la matriu  $n \times n$   $A = (a_{ij})$ , que té uns a la primera fila i columna i satisfà que  $a_{ij} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$  per  $i, j > 1$ . Sabríeu acabar-lo vosaltres solets?

### 9. El final serà de càlcul

A classe de Numèrica hi ha 2021 seients, numerats de l'1 al 2021. Sorprenentment hi assisteixen 2021 estudiants, numerades de la mateixa manera, i es demana que cadascuna ocupi el seient corresponent al seu nombre. Però la primera estudiant es despista i tria aleatòriament un lloc on seure. Aleshores la resta d'estudiants, per ordre ascendent, procedeixen de la següent manera: si el seu seient està disponible, hi seuen; altrament, trien aleatòriament un dels seients lliures. Quina és la probabilitat que l'estudiant 420 pugui gaudir d'una apassionant classe de Numèrica asseguda al seu seient?

## 10. Torre de $\pi$ sa

La Joana Pi ha anat de viatge a Itàlia, però és incapaç de trobar la torre de Pisa. Ella assegura que s'assembla molt a la següent funció:

$$T_n(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}, \quad \text{on la variable } x \text{ apareix } n \text{ cops.}$$

Ajudeu a la Joana a trobar o bé la torre de Pisa, o bé el següent límit, si existeix.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\sqrt[2\sqrt{\pi}]{\pi})$$

## 12. Cuidem la gespeta

Després de l'èxit del torneig d'escacs de la FME, la Dele ha decidit incorporar també els esports de motor dins les activitats que realitza. Més concretament, han organitzat un campionat de carreres d'eCooltra. En cada carrera els participants competeixen 1 vs 1 en un revirat circuit pel pati de la facultat, i es donen 2 punts al guanyador de la carrera i 0 al perdedor, o bé 1 punt a cadascú en cas d'empat, és a dir, si arriben molt junts i el jutge no és capaç de determinar qui ha creuat la línia de meta primer.

En aquesta 1a edició s'han apuntat 12 participants. Un cop acabat el campionat (han competit tots contra tots exactament una vegada), tots els participants han obtingut un nombre diferent de punts. A més, sabem que el 2n classificat ha obtingut tants punts com la suma dels últims 5 junts. Amb aquesta informació, sou capaços de determinar el resultat de la carrera entre el Marc "Márquez" Heráult i el Pol "Espargaró" Tibau, 6è i 8è classificats respectivament?