

XXV Marató de Problemes

4 de Maig de 2021

Bloc II - Més fàcil que complexa amb el Rivero

13. Doritos

En Gary vol construir un triangle especial per la seva propera actuació. Per fer-ho disposa d'una vareta recta, que llença contra el terra amb molta força. Assumim que, quan la vareta impacta contra el terra, aquesta es trenca en dos punts que segueixen una distribució uniforme al llarg de la vareta, donant lloc a tres segments. Quina és la probabilitat que en Gary pugui formar el triangle soldant els segments i així petar-ho a la pròxima actuació?

27. No hi ha meló sense taca

L'Alvarito no cata ni mitja. Creu que quan va taja parla millor el català, però els que només l'han vist parlar català taja, ho dubten. Trobeu totes les seqüències finites (x_0, x_1, \dots, x_n) tals que per cada j , $0 \leq j \leq n$, x_j és el nombre de cops que j apareix a la seqüència.

28. Tu loko, que m'han robat el mòbil

A en Gimó li han robat el mòbil. Amb l'ajuda de la detectiu Naila, ha pogut determinar que el lladre l'ha venut a una de les 2^n tendes de mòbils de Barcelona, numerades del 0 al $2^n - 1$. Després de formar una bona gang, decideixen fer una "visiteta" a cadascuna de les tendes. Comencen amb la tenda 0 i, si a la tenda x no han tingut sort, provaran amb la $29x + 7 \pmod{2^n}$. Però la Naila està preocupada perquè creu que es deixaran alguna tenda sense visitar. Podeu tranquil·litzar-la demostrant que les visitaran totes?

30. El anillo pa' cuando

L'Izan vol proposar matrimoni a l'Andrea i està pensant quin anell regalar-li. S'ha decidit per comprar-li un anell R (no necessàriament commutatiu ni unitari), on el quadrat de tot element és 0. Sap, però, que l'Andrea no accedirà a casar-se amb ell si no és capaç de demostrar que $abc + abc = 0$ per qualsevol $a, b, c \in R$. Podríeu ajudar-lo?

31. A l'aventura

L'Enric Ventura està resolent el següent problema a la pissarra:

Sigui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un paio continu tal que la seva restricció a qualsevol recta passant per l'origen té un mínim local a l'origen. És cert que aquest imbècil té un mínim local a l'origen?

La mà esquerra li diu: "Hòstia, està clar de collons". Però la mà dreta diu: "Cony, doncs a mi no em surt". El podeu ajudar a sortir de l'embolic?

36. sinO lo sabes no le des

En Pep Burillo és un fanàtic dels [concursos de cultura general](#). A l'últim que va participar, li van preguntar si existeix alguna matriu $O \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$\sin O = \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tot i que la resposta és evident, el seu company va prémer el polsador primer i es va quedar callat (ni tan sols es va adonar que tenia un 50% de possibilitats d'encertar si responia aleatòriament). Què hauria respost en Pep, que encerta sempre?

Nota: El sinus d'una matriu X es defineix como todo el mundo espera:

$$\sin X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1}$$