XXV Marató de Problemes

5 de Maig de 2021

Bloc III - Proves cangur 2021

37. Regla de la cadena

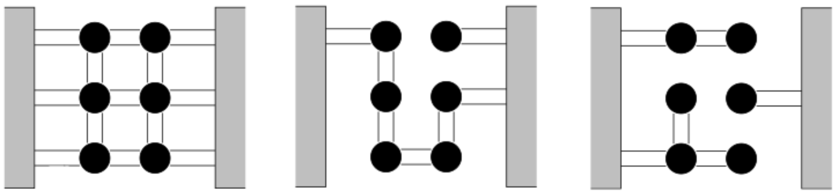
Sigui $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunt de les parts de $\mathbb{N}$. Una cadena és un conjunt $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ totalment ordenat per la inclusió, com per exemple,

$$\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}.$$

En Fèlix Adrian i en Samu estan competint per veure qui és més cani. Per això, en Samu s'ha comprat una cadena $\mathcal{C}$ de cardinal numerable. En Fèlix, per no ser menys que aquest pallasso, se'n vol comprar una de cardinal no numerable. La trobarà?

39. Qui riu ara?

L'Anna Río creua cada dia el riu de la primera figura, que conté 6 illes connectades per ponts. Un dia, una inundació destrueix alguns dels ponts. Suposem que cada pont és destruït amb probabilitat $\frac{1}{2}$, independentment de la resta de ponts. Quina és la probabilitat de que l'Anna pugui creuar el riu de banda a banda després de la inundació? (A la segona figura SÍ que podria, a la tercera NO)



40. Malament va l'internet

Al Marçal Font li ha marxat el wifi a meitat de classe de Càlcul, i no ha pogut copiar la solució del següent problema:

Sigui r un real positiu. Per cada parella de reals x, y, definim per $N_r(x,y)$ el nombre de parells d'enters (m,n) tals que $(x-m)^2 + (y-n)^2 \leq r^2$. Calculeu, en funció de r, el valor de

$$\int_0^1 \int_0^1 N_r(x,y)\, dx\, dy$$

Com que no sou tècnics, no li podeu arreglar l'internet. Podríeu almenys ajudar-lo a resoldre el problema?

81. Àlgebra Bàsica

L'Anna Bernadas i l'Anna Brusosa creuen haver trobat una demostració pel següent problema:

Donades dues aplicacions lineals $A, B : V \to V$, on V és un e.v. de dimensió finita, és cert que si $A + B = AB$ aleshores $AB = BA$?

L'Andreu Boix i l'Àlex Batlle diuen que no només això, sinó que també és cert si V té dimensió infinita. Tenen raó o s'han passat de llestos? I les Annes?

82. Quer drama!

Acostumats a tenir en Pere Pascual a topologia, en Jordi Quer opina que els alumnes només han après a dibuixar tors i boles peludes. Per això ha decidit posar el següent problema:

Sigui $\mathbb{K}$ un cos. Podem dotar l'espai afí $\mathbb{K}^n$ amb la topologia de Zariski, en la qual un conjunt $T \subseteq \mathbb{K}^n$ és tancat si, i només si, existeix algun conjunt $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$T = V(S) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \forall f \in S\}$$

Proveu que $A = \{(n, 2^n, 3^n) \in \mathbb{C}^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ és dens a $\mathbb{C}^3$ amb la topologia de Zariski i demostreu-li a en Jordi Quer que heu après alguna cosa.

84. H4H4H4H4

Cada dia al sortir de classe, per no tornar a casa sol el Max Cunill intenta convèncer (sense gaire èxit) als seus amics que agafin el bus H4 amb ell. Cansat de que ningú li faci mai cas, ha decidit apostar-se amb l'Enric Rabasseda (un habitual de la L3) que qui guanyi el següent joc triarà com tornaran avui:

Jugaran per torns i alternadament. Inicialment, tenen una graella de $m \times n$, $n, m \geq 2$. En un torn, un jugador escull una casella i l'elimina juntament amb totes les que es troben a la mateixa fila o a una inferior i la mateixa columna o en una de més a la dreta. El jugador que agafa la casella de dalt a l'esquerra, perd.

El Max, que és qui comença escollint casella, està molt segur de tenir una estratègia guanyadora. Però l'Enric creu que pot guanyar independentment de com jugui el seu rival i, per tant, podrà estalviar-se d'agafar l'H4 un dia més. Qui té raó?