XXV Marató de Problemes

7 de Maig de 2021

Bloc V - El Ganso diu que són well-known

109. Rosant el pal

La Carlota Gràcia vol pintar tot l'univers de rosa, però no sap per on començar. Per això, en Max l'ajuda pintant n punts de $\mathbb{R}^3$ de rosa, i a partir d'aquí, li diu a la Carlota que segueixi pintant de la següent manera: a cada pas, si hi ha quatre punts roses sobre la mateixa recta, la Carlota pot pintar de rosa qualsevol punt d'aquesta recta. Mentre ho fa, se n'adona que a aquest ritme podrà pintar de rosa qualsevol punt de $\mathbb{R}^3$ en un nombre finit de passos! Quin és el mínim nombre de punts n que ha d'haver pintat en Max perquè això sigui possible?

111. Cuanto más coprimo, más me arrimo.

Com que els participants de la marató són uns ploramiques i prefereixen resoldre els problemes programant que usant el coco, hem decidit testar les vostres *programming skills*.

Ompliu una graella de $2^n \times 2^n$ amb els nombres de l'1 al 4^n (ha d'aparèixer un cop cada un) de manera que qualsevol parell de nombres adjacents (comparteixen un puto costat, que si no ho posem sabem que us començareu a queixar) siguin coprimers. Heu d'enviar una única graella i el valor de n el podeu triar vosaltres sempre que es compleixi $0 \leq n \leq 7$. Obtindreu n punts si és correcta i 0 altrament. Es poden fer servir eines computacionals. Envieu un fitxer `.txt` amb un únic enter a la primera línia, el tamany de la graella (2^n). En les següents 2^n línies, escriviu 2^n nombres a cadascuna (separats per espais) descrivint la graella.

PD: Si sospitem que el Baroja us ha passat la graella, demanarem el codi/algorisme o solució.

112. Quins pebrots!

Després del sobreesforç que va fer redactant els apunts de Càlcul 1, el Padró no ha sigut mai més capaç de fer res productiu. A l'última classe va plantejar el següent problema:

Siguin $(a_n)_{n\geq 1}$ i $(b_n)_{n\geq 1}$ seqüències de reals positius amb $a_1 = b_1 = 1$, $b_n = b_{n-1}a_n - 2$ per tot $n \geq 2$. Suposeu que (b_n) està fitada. Proveu que la següent suma convergeix, i trobeu el seu valor.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n}$$

Però no el va acabar de resoldre amb l'habitual excusa de que "ja el teniu resolt a Atenea per un de vosaltres". Quan en Daniel Quiles ha mirat a Atenea, se'n ha adonat que el Padró els estava prenent el pèl. Podríeu ajudar a en Daniel?

117. Però el Sarrus no és allò de les dents?

A causa de les males notes que van treure l'any passat, els n^2 alumnes d'en Jordi Guàrdia han repetit. Novament, les notes han sigut catastròfiques, i, mantenint-se fidel al seu mètode, en Jordi les ha escrit en una matriu $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, que curiosament compleix que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ és un nombre primer,} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Cabrejat, en *Martín Rodríguez* ha tornat a anar a revisió. Per aprovar d'una vegada per totes, en Jordi li ha demanat que demostri que $|\det(A)| = k^2$ per algun enter k o no podrà pujar nota!

118. Quina desgràcia!

Com que en Xavi Gràcia s'ha passat 40 minuts queixant-se de que anava molt curt de temps, no ha tingut temps de demostrar el següent enunciat, així que l'ha deixat com a "miniexercici". Sabríeu resoldre'l?

Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^\infty$ tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $f(x) \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que existeix un enter positiu n i un nombre real x tal que $f^{(n)}(x) < 0$.

120. Iba a pgepagag una cena de picoteo

Mentre l'Edgar buscava el mar sota les llambordes de París, s'ha trobat amb el següent problema a sota d'una pedra.

Peg a cada enteg positiu k, sigui $t(k)$ le divisog senag mes gran de k. Detegmineu tuts les entegs positius a peg les quals egsisteix un enteg positiu n peg le qual tutes les difegencies

$$t(n+a) - t(n), \quad t(n+a+1) - t(n+1), \quad \ldots, \quad t(n+2a-1) - t(n+a-1)$$

són divisibles peg 4.