XXV Marató de Problemes

8 de Maig de 2021

Bloc VI - Us ho esteu passant bé, oi?

121. *Phi*ñaaaaaaaauuuuu

Acto 1. (Entra el pionero piloto Francesco Virgolini, pináculo de la ingeniería automovilística, rápido como ave de rapiña e imparable como apisonadora. Y Rayo McQueen.)

FV: Buongiorno, buonasera a los signori e la principessa.
RM: La velocidad. Yo soy la velocidad. Flota como un Cadillac, pica como un Beemer.
FV: Il tui soluzioni e una merda. Molta velocità pero zero explicazioni.
RM: Soy más rápido que rápido. Más rápido que rápido. ¡Soy un rayo! Tú un chapas.
FV: Chiapas! ÍO!? É possibile, pero... Chi te piu problemi publicatti?

Enunciat 1. *Per cada nombre natural n, sigui S_n el conjunt d'enters positius m tals que $\{\frac{n}{m}\} \geq \frac{1}{2}$, on $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ representa la part fraccional de x. Demostreu que*

$$\sum_{m \in S_n} \varphi(m) = n^2$$

Acto 2. (φ es la función de Euler)

FV: Andiamo! A escribire le soluzioni! Acto 1...
RM: Te veré en la línea de meta, amigo.

243. Put in more words

Espereu. Tranquis, Wide Putin. Que ja us veiem escrivint "243. *Trivial* $\square$" i encara no heu ni llegit el problema. Potser a Harvard això us ho accepten però per nosaltres no tot és tan fàcil. Respireu profundament i intenteu resoldre el següent problema en no menys de 3 línies.

Sigui $d \geq 2$. Donada l'esfera S^{d-1} i d punts sobre ella, demostreu que es pot traçar una recta passant per l'origen tal que la distància de cada punt a la recta sigui com a mínim $\sqrt{\frac{d-1}{d}}$

244. Ens està costant quadrar els enunciats

El Fausto està quadrat. Un quadrat té costats, i sembla que la llista 3 ha costat molt als Machis. Tampoc és que ens quADRI la seva liada al problema 12, que els hauria d'haver sortit RODat. Demostreu que el límit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{1/n}$$

existeix i coincideix amb el nombre de dominades que pot fer l'Enric, trobant el seu valor.[1]

[1] Fonts oficials asseguren que l'Enric, en veure l'enunciat, esTaba en plan: "Jo no me'n ric".

246. Para todo böl·la

L'equip de l'Elexioma de l'Acció està competint contra els Problemàtics a veure qui és més pilota amb el comitè organitzador de la Marató. Suposem que disposem d'un conjunt numerable $\mathcal{A}$ de pilotes (*böl·las* abiertas) i el cub unitat a $\mathbb{R}^3$, i que per cada conjunt finit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, és possible col·locar totes les pilotes de $\mathcal{B}$ dins el cub sense que es toquin dos a dos. Demostreu que és possible fer el mateix amb totes les pilotes de $\mathcal{A}$.

247. Pal Urdős

Veient les solucions que ens heu enviat fins ara, sembla que d'entre els participants d'aquest concurs no en sortirà un futur Paul Erdős, ni tampoc cap Euler. Resoleu el següent problema per a fer-nos canviar d'opinió:

S'escriuen els enters de 1 a n en n cartes diferents, que es barregen en una baralla. L'Oriol Baeza, el Pau Redon i l'Arnau Padrés escullen aleatòriament cartes de la baralla en el següent ordre: primer n'escull una l'Oriol, tot seguit una el Pau, a continuació l'Arnau, després en tria una altra l'Oriol... Cada vegada que es tria una carta, aquella mateixa i totes les que tenen un nombre més alt es treuen de la baralla, i les restants es barregen de nou abans que el següent jugador n'esculli una. Un jugador guanya quan escull la carta amb el número 1. Demostreu que, per a cadascun dels 3 jugadors, existeixen valors de n arbitràriament grans pels quals aquell jugador és el que té la probabilitat més alta de guanyar el joc.

252. *Dino* a pujar solucions decents.

Un dia d'estiu del Cretàcic tardà, mentre l'*Apatosaure* llegia tranquil·lament el següent *paper* (imprès a DIN O4) sota l'ombra d'una falguera gegant, se li va acudir el següent problema:

És possible tallar un full DIN A4 en un nombre finit de quadrats?

Però quan el va proposar a la seva colla de bro-saures, es van adonar que cap d'ells sabia resoldre'l, ni tan sols amb l'ajuda del *paper*. Per això, aquest any (no s'havien extingit ja?) han decidit provar amb coses més assequibles. Els ajudeu?

Per a quins enters $n > 1$ existeix un rectangle que es pot subdividir en n rectangles similars a l'original de mides diferents?