XXV Marató de Problemes

9 de Maig de 2021

Bloc VII - Ho sentim

253. A bel si hay suerte

L'Abel Doñate ens ha demanat **siusplau** que ens deixem de tonteries i posem algun problema de veritat. No obstant, el comitè organitzador no vol que la resta de participants es quedin enrere, així que decideixen deixar-ho en mans de l'atzar. Donat que no disposen d'una moneda o un dau, però casualment sí que disposen d'un disc unitat, ho faran de la següent manera: triaran 5 punts aleatòriament al disc unitat, de manera uniforme i independent. Si l'embolcall convex dels punts és un triangle, llavors posaran un problema de veritat. Quina és la probabilitat de que l'Abel quedi satisfet?

255. Galego do 94. Matemático

A causa de les petites discordances de l'Óscar Rivero amb l'actual rector, l'Óscar s'ha vist obligat a marxar a l'exili. Des d'allà, recorda amb enyorança els bons temps en que podia enviar classes senceres a una recu. Per això, i en honor a ell, hem decidit torturar-vos una mica amb el següent problema:

> *Sigui $P \neq 0$ un polinomi a coeficients reals. Es defineix la seqüencia de polinomis $P_0, P_1, P_2, \ldots$ segons $P_0 = P$ i $P_{n+1} = P_n + P_n'$ per cada $n \geq 0$. Proveu que existeix un nombre N tal que per tot $n \geq N$, totes les arrels de P_n són reals.*

256. Me tenéis hasta el xixi

L'activitat és frenètica a la comissió de festes del 2000. Porten 4 mesos de ressaca en ressaca, organitzant festes sense parar i dissenyant samarretes que s'entenen a la primera. Sembla que amb tant de desmadre, no han tingut temps de pensar en el següent problema:

> *Demostreu que existeix un nombre real $\alpha > 1$ que satisfà la propietat següent: si $n > 1$ i $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n$ son enters positius tals que $\frac{1}{\xi_0}, \frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{1}{\xi_n}$ estan en progressió aritmètica, aleshores $\xi_0 > \alpha^n$.*

270. Quin problema tenen els putus cefisos?

Aquest: Sigui $f(n)$ el nombre de n-tuples ordenades d'enters positius $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tals que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Determineu la paritat del nombre $f(272)$.

271. El análisis real se enseña mal. Punto.

En Xavier Cabré està molt emprenyat. Corregint els exàmens parcials, s'adona que han estat un desastre perquè els seus alumnes no duen una base sòlida d'anàlisi real. Ni tan sols fent un estudi a fons dels seus apunts que tantes hores ha esmerçat en preparar, han sigut capaços de demostrar la *well-posedness* de cert problema de Cauchy. Així doncs, decideix demanar als seus professors de problemes que expliquin el següent problema a classe. Serieu capaços de resoldre'l?

Considereu l'operador

$$(Av)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x v(t)dt$$

per $x \in (0,1]$, *actuant sobre funcions reals* $v \in \mathcal{C}^0([0,1])$, *i la successió de funcions* $(u_n)_{n\geq 0}$, *amb* $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definida per*

$$\begin{cases} u_{n+1} = Au_n \\ u_0(x) = g(x), \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

amb $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$. *Determineu* $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$ *per a cada* $x \in (0,1]$.

273. I la numeració?

En Josep Fontana està esperant amb candeletes la pregunta sobre la numeració dels problemes. En arribar a l'última llista, s'ha emportat un desencís en veure que aquest any no han preguntat res al respecte. Per apaivagar el seu enuig, s'ha posat a pensar en altres coses no relacionades, com el següent problema:

Existeix algun conjunt $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 100000\}$ *de cardinal* $|S| = 2021$ *de manera que no hi hagi tres elements a* S *que estiguin en progressió aritmètica?*