

XXVI Marató de Problemes

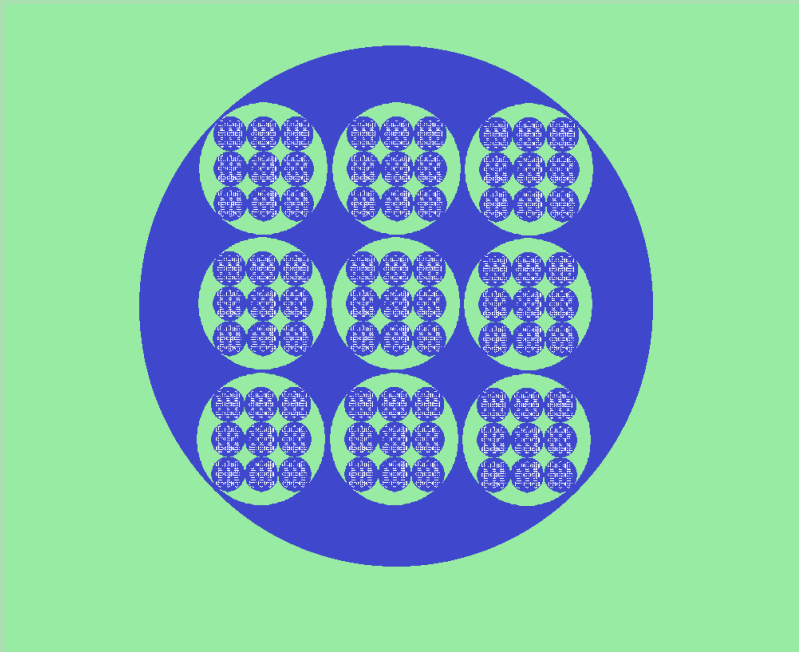
COMMIES (Comitè Organitzador de la Marató Més Important de l'Europa del Sud)

9 de Març de 2021

Bloc IX - Ho sabeu fer des de *vuestra más tierna infancia*

1. Això va de tradicions

Antany, hi havia una tradició molt maca que era el concurs de fractals, per desgràcia, només va durar un any. Per sort, n'hi havia una altra, que tot i no ser tant maca, ha perdurat, que és que el primer problema de la marató tracta sobre el logo de la nostra estimada universitat. Ajunteu les dues tradicions trobant l'àrea blava, sabent que el cercle gran té àrea π .



2. Rouritos

Als Rouritos els hi agrada molt els ordinadors i per tant les potències de 2. Resulta que les potències de 2 són més maques si l'exponent també és potència de 2. Sigui p un nombre primer de la forma

$$p = 2^m + 1$$

demostreu que m és potència de 2.

4. Joan palomo

Enuncieu el problema que heu de resoldre i resoleu-lo.

PD: El Joan no sap que és un tetraedre.

PDD: El Joan és un palomo perquè no sap fer el problema 4 de la OME del 2018.

5. Sierra i les pituquis...

Al Luis li agrada molt festejar amb pituquis. En particular, hem trobat que la mitjana del nombre de pituquis (μ) amb les que parla el Luis cada dia compleix

$$\mu(\theta) = \frac{4 \cos^3(\theta) - \cos(3\theta)}{\cos(\theta)}$$

per un cert $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ que depèn de com es llevi el Luis aquell matí.

Trobeu amb quantes pituquis festeja el Luis.

Bonus track: Podeu endevinar els noms de les d'avui?

7. Ei, vols estudiar estructures?

L'Aleix es va passar la primera nit de la Sortida de la Dele explicant estructures a la Joana. Ara es vol assegurar que va aprendre molt. Però la Joana estava *despistada* i no s'enrecorda de res! La podeu ajudar a resoldre els problemes?

Sigui G un grup cíclic d'ordre n , proveu que G té un subgrup cíclic d'ordre d si i només si $d|n$.

Sigui R un anell (de compromís) tal que per tot $a, b, c \in R$ $a \neq 0$ on $ab = ca$ tenim $b = c$, proveu que l'anell és commutatiu.

Sigui K un cos, proveu que a $K[x]$ hi ha un nombre infinit de polinomis mònics irreductibles.

8. Piki piki!

La Laura Arribas es va apuntar a la assignatura de Combinatòria per aprendre més coses sobre grafs, ja que és una apassionada del graf de la FME. Però, com sempre, va acabar no anant a cap classe així que ara vol saber la màxima K -clique del graf i no s'ensurt.

Puntuació problema = #vèrtexs de la K clique del graf de la FME que nombreu

PD: si les arestes no estan al graf però ens podeu demostrar en directe que haurien d'existir seran considerades.