

XXVI Marató de Problemes

COMMIES (Comitè Organitzador de la Marató Més Important de l'Europa del Sud)

9 de Març de 2021

Bloc VIII - Això ho saben fer els dades

12. No us ho va ensenyar en Rivero a Càlcul I això?

Demostreu la igualtat següent per tot $n \in \mathbb{N}$ sense utilitzar integració per parts (ni res que s'hi assembla).

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

Atenció: Si la vostra solució no inclou el cas $n = 0$ sereu automàticament desqualificats.

13. Mortíssimes!

La Duna està muntant una nova taula per la Dele. Però com està molt distreta perquè la Berta li demana atenció ha fet els forats per les potes en un lloc aleatori. Sabent que la taula és rodona i ha fet tres forats quina és la probabilitat que la taula s'aguanti?

15. O deixes la relació o deixes la carrera

L'Anna, la Leila i el Pau es troben davant dues relacions d'equivalència: R i S . L'Anna diu que si definim V tal que xVy si xRy o xSy , llavors V és una relació d'equivalència. La Leila diu que ho hem de definir com a xVy si xRy i xSy , mentre que el Pau que no vol enfadar cap de les dos assegura que les dues definicions són equivalents. Qui té raó?

16. L'actitud escaladora del Bernat no decepciona mai

Avui el Bernat Ramis ha anat a la Foixarda amb l'Otis, el seu ornitorrinc preferit. Apart de ser l'únic mamífer verinós i un dels pocs mamífers ovípars, l'ornitorrinc té una tècnica d'escalada molt particular: agafa una b.o.n.a base ortonormal v_1, v_2, v_3 i només avança trams de longitud 1 m en la direcció i sentit d'un dels tres vectors de la base. A més, si el seu camí inclou dos passos en direcció v_1 , el tros de camí entre aquests dos passos sempre inclou un pas en direcció v_2 , i viceversa: el camí entre dos passos seguint v_2 sempre inclou un pas seguint v_1 . El Bernat ha escollit una b.o.n. amb v_3 vertical respecte al terra i vol fer servir aquesta tècnica per pujar n metres avançant també n metres en direcció v_1 i n metres en direcció v_2 , amb n qualsevol natural* perquè pot perquè està molt mamat. Per quants camins pot aconseguir el seu objectiu?

*Nota: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, naturalment.

20. Pedrete

Nota: Els que no saben jugar al mus no poden resoldre aquest problema. Discriminació positiva (o podeu entrar a la web de Mus FME i aprendren).

La llegenda explica que en algun moment es va jugar la final del torneig de mus FME de tardor 2020. Potser a la Festa de Nadal. Potser no.

Jugaven com a primera parella en Matc amb en Pablo; com a segona parella, n'Alejandro Basilio Galván Pérez-Ilzarbe amb en Dani el Killer. Per sort o per desgràcia, la llegenda no té una única versió.

La primera parella defensa la següent versió: Era la Festa de Nadal, tot i així s'havia acordat jugar-hi la partida final. En Matc, que anava taja, li va prendre una de les monedes de diàmetre 0,5 cm que sempre porta n'Alejandro Basilio Galván Pérez-Ilzarbe i el tauler d'escacs amb caselles de 1 cm x 1 cm que sempre porta n'Andreu Boix. En Matc llança la moneda sobre el centre del tauler per a que no s'apropi a la frontera d'aquest. La moneda, quan s'atura, cobreix un vèrtex del tauler (un vèrtex toca quatre caselles del tauler). Aleshores, en Matc, pel que ha sortit en aquesta experiència, decideix abandonar el seu company Pablo i se'n va a la disco.

La segona parella defensa aquesta altra versió: Era un enfortament d'allò més emocionant. Es jugava tot a l'última partida, i a l'última mà: les parelles anaven 39 a 39. En Matc era mà, i en Dani el Killer era el darrer en jugar. Els tres primers jugadors havien demanat mus, així que en Dani el Killer decidia si es feia mus o no. Per 'coses', en Dani el Killer sabia que la mà d'en Matc era: rei, cavall, sis i as; i que la mà d'en Pablo era: rei, sota, set i as. Malauradament, com no sol passar, en Dani el Killer tenia males cartes: as, quatre, cinc i set. En Dani el Killer, astutament, va inferir que la intenció dels seus adversaris era millorar les seves mans per llançar un órdago a gran i assegurar-se la victòria. En Dani el Killer no podia jugar amb la seva mà, i n'Alejandro Basilio Galván Pérez-Ilzarbe li feia cara de 'mus si us plau'. Llavors, en Dani el Killer només tenia una opció: anar a per el pedrete! Amb això, en Dani va demanar mus, es va descartar del seu as, li va pujar un sis i van guanyar la partida per pedrete!

Quina versió és més verosímil? (Què és més probable que succeeixi, que la moneda que llança en Matc toqui un vèrtex, o que, sabent el que sap en Dani el Killer, li pugui el sis per obtenir el pedrete?)

21. Álvaro palomo

L'Álvaro no sap com funcionen les normes d'exponenciació, així que l'Edgar li ha fet un problema per trolejar-lo: És cert que $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$ se satisfà $(z^x)^y = z^{xy}$?