

XXVI Marató de Problemes

COMMIES (Comitè Organitzador de la Marató Més Important de l'Europa del Sud)

9 de Març de 2021

Bloc VII - Final de topo 2021

25. Chad mà dreta, virgin mà esquerra

Les classes d'en Ventura són de tot menys monòtones. Suposem que l'Enric vol escriure una funció monòtona $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i vol saber si existeix $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. La mà dreta escriu una funció creixent, i l'esquerra una de decreixent. Ajudeu a cada mà a decidir si existira aquesta x .

26. Una regió de Hong Kong

El Guillem Coderch no recorda com es diu el seu president. El Bernat li diu: *Xi, no?*. Cansat, va a pensar el següent problema. Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex, i E, F dos punts interiors tals que $AE = BE, CE = DE, \angle AEB = \angle CED, AF = CF, BF = DF, \angle AFD = \angle BFC$. Proveu que $\angle AFD + \angle AEB = \pi$.

31. Mucho texto a continuación:

Els membres d'Aleu Iverson es troben jugant un KO a les pistes de baix. Per als que no sàpiguen què és un KO, es juga amb dos pilotes de bàsquet i una canasta. Els participants es posen en fila darrere de la línia de tir lliure, els dos primers amb pilota, i comencen a llançar. Si, dels dos que estan tirant, el que va darrere en la fila la fica abans, l'altre queda eliminat. Quan un jugador fa canasta, li passa la pilota al següent de la fila i es posa al final de la cua. El joc continua fins que només quedi un, que serà el guanyador.

Aquesta és la versió canònica del KO, però avui l'Aleix Torres vol canviar l'*estructura* del joc. Proposa que, quan un jugador sigui eliminat, tots els jugadors que havien estat eliminats per ell tornin a entrar. La resta de normes no canvien. Quan es vol començar una nova ronda, els jugadors es col·loquen a la fila segons l'ordre d'eliminació final, començant pel guanyador i acabant pel primer que ha estat eliminat sense una resurrecció posterior.

Després de jugar unes quantes rondes, l'Alejandro B.G.P.-I. es cansa de perdre sempre el primer i es queixa de que sempre té al Nil Fons darrere i això no és just perquè és molt bo i com que no perd mai jo no puc reviure i segur que l'Aleix ha inventat un joc trencat on l'ordre de la fila és sempre el mateix i així pot posar-se darrere del Nil i sobreviure més estona i quina injustícia tot. Té raó l'Alejo en que l'ordre inicial de la fila és el mateix totes les rondes? Aquesta és una bona pregunta que ens va fer mandra resoldre aquell dia. Si voleu, podeu pensar-la, però no té

res a veure amb el problema de la maratón, que és el següent: troba la permutació σ de $[n]$ que maximitza:

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i)\sigma(i+1)$$

on $\sigma(n+1) = \sigma(1)$

32. f i T

N'Albert Canales vol anar a la darrera moda. Ja s'ha comprat unes ulleres molt *fancy*. Però està trist perquè els pantalons ajustats no li passen pels bessons. Tot és culpa del moviment inquiet de les seves cames quan està assegut. Segons els seus càlculs, creu que és capaç de fer-les tremolar amb un període de 0,182 s!

Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció periòdica ($\exists T > 0$ tq $f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$) no constant. El conjunt dels períodes de f té mínim? Demostreu-ho o doneu-ne un contraexemple. I si afegim la hipòtesi que f és contínua, canvia la veracitat?

34. Belles arts

Últimament la gent de Belles Arts està sempre a la terrassa del bar (i el Sergio no diu res!). Els Matfis de $2n$ i el Bernat s'han cansat i els han reptat per que marxin per sempre. Per a que sigui just el repte va de dibuixar! Han dit que no creuen que siguin capaços de dibuixar un diagrama de Venn per a 3, 4, 5 i 6 conjunts (un de diferent per cadascun òbviament!). Vosaltres en sabeu?

35. UPC 0.5

Aquest quadri, el Conchello i el Nistal només s'han avançat cinc assignatures per poder dedicar més temps al seu amor. És per això que avui (com cada dia) han decidit que no calia anar a classe i han entrat a la sala CFIS, sense saber que anaven directes cap a una emboscada! Amagades sota una taula, esperàven l'Olga i la Laia, encara ressentides per haver perdut el premi a Bolzano-Bàiestras. Amb molt dinamisme, s'han llançat sobre ells i la Laia els ha atordit a cop de cubata.

El Conchello ha despertat a una de les saletes d'estudi en grup (sales de mus quan la FME era un lloc decent), amarrat a una cadira, i al moment ha lamentat no haver vingut amb Berwhale la Justiciera, el arma del Elegido, creada para destruir a Pewnack el Destructor, el Oscuro, la Bestia. Desolat, ha mirat per la finestra i ha vist 12 arbres del pati. El Nistal s'ha trobat en una situació semblant, però des de la seva saleta pot veure 8 arbres. La veu de l'Olga perfora els seus tímpanes:

- Juguem a un joc. Li preguntaré al Conchello quants arbres veu el Nistal per la seva finestra. Com a pista, us dic que entre tots dos veieu 18 o 20 arbres del pati i que no hi ha cap arbre que pugueu veure tots dos. Si no està segur, pot passar i li preguntaré al Nistal quants arbres veu el Conchello; si tots dos passeu, us tornaré a preguntar una hora després. Si un dels dos dona una resposta errònia, el vostre bonic romanç arribarà a un tràgic final i nosaltres passarem a ser les*

noves B-W. Si un dels dos encerta, sereu lliures. Ah, i en tot cas, haureu de pagar 100€ pels desperfectes, que heu caigut desmaiats sobre la impressora.

Assumirem que les sales són insonoritzades (xd). Com que els nostres protagonistes són molt llestos i tot això, suposarem que donaran la resposta correcta tan aviat com puguin. Quant de temps trigaran en poder tornar a reunir-se i estudiar assignatures que no haurien d'haver matriculat?

***Nota:** No tingueu en compte el nombre real d'arbres que hi ha al pati. Heu de saber que aquesta quantitat és molt variable: de vegades uns energúmens de dades (valgui la redundància) talen un, i potser un altre dia els matfis de 4^t en planten set per compensar el seu projecte de PEF. Potser, inclús, el Salvador Roure està quiet al mig del pati.