

XXVI Marató de Problemes

COMMIES (Comitè Organitzador de la Marató Més Important de l'Europa del Sud)

9 de Març de 2021

Bloc VI - Més fàcil que la sele post-COVID

44. Fiñáuuuuu

Arriba el Francesco Virgolini, la bèstia, azote de Mamadísimos, el bòlid més ràpid de la història, la màquina més admirada de l'univers, de la Terra, de la Via Làctia, inclús del sud d'Europa... ah, i també arriba el Rayo McQueen. Com molts ja sabreu, aquests automòbils són veterans de la Marató i per aquesta edició formen part del COMMIES (Comitè Organitzador de la Marató Més Important de l'Europa del Sud). Aquest any han decidit fer una carrera molt particular:

Rayo: Els cotxes que utilitzareu els n participants estan numerats de 1 a n . Sortireu en fila índia, en un ordre que no serà necessàriament el dels vostres vehicles. Després, nosaltres anirem dient cada minut un nombre entre 1 i n . Si diem i , el cotxe i haurà d'avançar i llocs a la fila si té i o més jugadors al davant. Si en té menys, la marató haurà acabat.

Francesco: I questa è l'única situazione di adelantamento; per exempili, la macchina treintaichinkue no podrà avançar a ningú altro si no diem el número treintaichinkue.

a) Demostreu que la marató no pot durar infinitament.

b) Quin és el temps màxim que el Francesco i el Rayo poden allargar-la, si ells escullen l'ordre de sortida?

Nota: Com que tots els participants són uns cracks, suposem que necessiten menys d'un minut per realitzar qualsevol avançament.

45. DiMARCres

El Marc Felipe segueix venint a la facultat tot i que és de 9è, però ara només ve els dijous. Aquesta no és l'única tradició relativa a dies que ha tingut durant la seva vida. Durant una temporada feia setmanes de 8 dies ficant un dia entre dimarts i dimecres anomenat Dimarcres. Aquest estil de vida poc saludable el feia somniar en successions especialment rares. Diu que va somniar en una successió $\{a_n\}_n$ de nombres reals amb la propietat que per a tot $k \in \mathbb{N}$, es compleix que $a_{n+k} - a_n \rightarrow 0$, però que no convergeix. És aquest somni realista? I si aquesta propietat fos $a_{n+f(n)} - a_n \rightarrow 0 \forall f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?

51. Qui s'arrisca a fracassar? Qui saltarà, sense xarxa

El pobre Francesco ja se sap tota la història d'Espanya, i per tant ja està preparat per poder entrar a Mates, o a Dades... Té dues portes davant, i només una porta a una carrera que valgui

la pena. Per ajudar-lo a triar, té a tres novatos que no van saber-se decidir: el Nathaniel, la Joana i la Paula. El Francesco pot fer dues preguntes. D'entre els tres, un respon sempre la veritat, l'altre sempre menteix i l'últim respon aleatòriament. Digues quines preguntes ha de fer el Francesco per no tenir al Belanche de professor.

52. Hidra

TeatreFME estava preparant un obra amb monstres (per això necessitaven cadàvers) però se'ls hi ha anat de les mans. L'Hidra ha pres vida pròpia i ara els herois disfressats de romans l'han de derrotar. Poden tallar-li un cap amb les seves espases de joguina, però cada cop que tallen un cap a l'hidra, aquesta intenta créixer-ne dos de nous. Aquest procediment, però, pot fallar amb un 50% de probabilitat per a cada cap, de manera independent. L'hidra només pot morir si li tallen l'últim cap i no en creix cap més. Quina és la probabilitat que arribin a matar l'hidra? En aquest cas, quin és el nombre esperat de caps que cal tallar?

PD: Els Commies ens hem oblidat de dir que l'hidra té 10 caps, inicialment. Però tu no, tu pots ser el teu propi cap.

54. Avis novatos

El Francesc i l'Aleix estan tornant a aprendre àlgebra lineal per poder seguir Computació Quàntica. Com el Nistal els veu perduts els fica un problemeta. Donats tres endomorfismes A, B, C amb A invertible, és cert que $(A - B)C = BA^{-1} \implies C(A - B) = A^{-1}B$? El Francesc escriu un parell de coses a la llibreta i diu que ho ha demostrat per dimensió finita. L'Aleix no vol ser menys i diu que ell ho ha demostrat per dimensió finita i infinita. Tenen els dos raó, només el Francesc o cap dels dos?

55. Donuts

En Sergio i en Luis (sabeu qui és novatos?) estan transportant els donuts pel bar de la facultat. Com que s'avorreixen, es posen a pensar què passaria si enganxessin infinits donuts (direm que dos donuts estan enganxats si l'àrea de la zona de contacte és positiva, no val només amb un punt). Una manera d'enganxar-los és en línia recta de manera infinita en una direcció (amb els centres en els punts de \mathbb{N}); una altra manera és també en línia recta però de manera infinita en les dues direccions (amb els centres en els punts de \mathbb{Z}): i una tercera manera és formant una xarxa bidimensional (amb els centres en els punts de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Si ens fixem en la superfície d'aquestes construccions (allà és on està el sucre!), n'hi ha dues que són homeomorfes entre elles i una tercera que no, sabríeu dir quina? (No cal que demostreu res).