

XXVI Marató de Problemes

COMMIES (Comitè Organitzador de la Marató Més Important de l'Europa del Sud)

11 de Març de 2022 ¹

Bloc IV - Final de topo 2020

232. No hay que llorar, que la vida es un carnaval!

Ho podem reconèixer. La festa de carnaval no va estar tan malament. Vull dir, podríem haver tingut barra lliure? Sí. Podríem haver tingut la sala fins les 5 per tornar amb ferros i que el Max no hagués de fer el periple rar per tornar a casa? També. Va fallar el concurs de Teoremes, això sí. Però ens ho vam passar molt bé, el guardarrobes funcionava sorprenentment com la seda, i la gent es va currar un huevo les disfresses. El que més ens va estranyar va ser quan l'Aina Azkargorta va proposar aquesta norma:

A la pista de ball hi ha 20 0-no-naturalistes i 22 persones que saben la veritat. (Per comoditat, diguem al primer grup *uns* i al segon *zeros*) Esperant fora hi havia infinits *uns* i *zeros* més. A cada cançó, s'escull uniformement i aleatòria a una persona. Si aquesta és un *ú*, invita a un *zero* que estigui esperant a la sala de ball, perrean molt duró i quan acaba la cançó marxen de la festa per estudiar estructures. En canvi, si s'escull un *zero*, aquest invita a un *ú* i a un *zero*, ballen la Macarena² i es queden a la festa. La festa s'acaba quan només hi ha (dos) *zeros* a la pista de ball.

(a) Quina és la probabilitat de que mai s'acabi la festa i el Max no hagi de tornar a casa?

(b) Ara, el Gimó, que va tan desbocat que s'ha tornat a posar la samarreta per treure-se-la un altre cop, decideix revertir la norma. És a dir, que si s'escull un *ú*, invita un de cada a la pista i es queden; si s'escull un *zero*, invita a un *ú* i desapareixen. La festa segueix acabant quan la pista és un lloc de pau on només hi ha *zeros*. Si la Ivet va cridar fins que comencéssim amb 20 *uns* i 22 *zeros*, quin és el nombre de cançons esperades?

233. Matc va calent

El Matc va molt calent. Tanmateix, ell defensa que no és culpa seva no, sinó de l'equació de la calor de l'equació. Tipo, si els teus veïns van més calents que tu els teus veïns, tu tendeixes a anar més calent tu. En canvi, si els teus veïns van freds els teus veïns, tu et refredes tu però. Per tant, Matc acusa a tota la FME de que ell vagi calent ell. Recordeu que per una funció

¹Ningú s'havia adonat que l'any estava malament a les llistes anteriors eh? Un punt menys per tothom

²És ben sabut que la Macarena es pot ballar amb qualsevol cançó, com trobareu a COMMIES demotrants-ho a qualsevulla festa

$u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$, es defineix el seu laplacianà com:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Per entendre una mica millor (només una mica) l'explicació del Matc, demostreu que per $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \int_{\partial B_r(x)} (u(y) - u(x)) dS(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \left[\left(\int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) \right) - u(x) \right] \end{aligned}$$

on $f_E := \frac{1}{|E|} \int_E$ denota fer la mitjana, i $dS(y)$ indica que la variable d'integració (de superfície) és la y .

Per aquest problema no calen eines de càlcul integral com saber fer integral de superfícies. Recordeu l'analogia entre integrar i sumar.

301. Series capaç d'aprovar aquest cop?

Un any més, les notes de Topologia han anat tan desastrosament com les *No-Festes* de 2021. Ni tan sols els entregables salven el nombre d'aprovat. Com que, amb les restriccions per la Covid, la facultat no té la capacitat suficient per allotjar una recuperació de Topologia, en Jordi Quer ha demanat consell a en Jordi Guàrdia.

Entre els dos, han decidit posar als alumnes un entregable extra, que consisteix a fer per grups un vídeo sobre algun tema relacionat amb l'assignatura. A cada grup d'alumnes se li assigna un nombre enter a partir de 1 (inclòs). No cal dir que hi ha suficients grups com per cobrir tots aquests enters, per això més que vídeos és tota una sèrie.

Un cop entregats i corregits, es publiquen les notes senzillament com:

$$\text{Grup } n : \frac{10(n+2)}{n(n+1)2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Els alumnes tremolen. Ha aprovat algun grup? Alguns alumnes encara tenen esperances: La suma de les notes de tots els grups és un aprovat?

Nota: entre 0 i 10. Aprovat a partir de 5 inclòs.

302. Què bogeria matfis

Fa uns dies, a la FME es va forjar una amistat insospitada. D'una banda, uns cavalls narcotraficants; de l'altra, el Vladimir Putonsky, comandant en cap de l'exèrcit enviat pel Kremlin per començar l'operació *сука блять* de conquesta del món sencer. En una exhibició de destresa diplomàtica³, la Cavalleria Matfis va convèncer al Putonsky de substituir la guerra per les bones vibres.

Després de fumar el porrele de la pau, es disposaven a sortir de l'aula, però es van donar de cara amb el canó d'una escopeta. Era l'Iñaki Iribarren, el seu professor de Química Orgànica,

³DROGA

que no volia tenir cavalls a la seva classe i havia vingut a acabar amb ells. La Cavalleria es va girar buscant l'ajuda del Putonsky; malauradament, ell ja havia fet un Vladimir (una ratlla i a dormir). Estaven sols. Però, com que he de ficar un problema de mates al mig d'aquesta èpica història, l'Iñaki els hi va donar una última oportunitat: perdonaria les seves vides si resolien el següent problema.

Siguin $g, f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dues funcions contínues tal que per tot $z \neq 0$, $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Demostreu que existeix $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(\frac{1}{z}) = f(-\bar{z})$.

Resoldre un problema proposat per aquell que va demostrar la falsedat del principi d'inducció no semblava una tasca fàcil. Els nostres valents cavalls van inspirar profundament (no per agafar forces, sinó per esnifar una ratlla de guix) i es van posar mans a l'obra.

310. Tú tan cabrón!

Estem al Vall dels Reis, al cor de l'antiga civilització egípcia. Un grup de ex-estudiants de la FME, que han perdut l'esperança de guanyar la Marató després de 0 punts en dues llistes, ha decidit dedicar-se a l'arqueologia. Han trobat indicis de que la tomba de Tutankamón té cambres per descobrir, i busquen la seva oportunitat de fer-se d'or, després de que el periple a Jane Street del Jordi Rodríguez no fos fructuós.

En principi havien de baixar els 4, però a l'hora de veritat, el Pau Cartanyà ha trobat un vídeo estrany i els ha dit que *cinc minuts i vinc* però s'han cansat d'esperar. En la calor del desert, el Jordi Vilà no podia esperar més i s'ha tret tota la roba, quedant-se en calçotets. No patiu per les cremades de sol, que ja entren a les catacumbes. Just abans d'entrar, el guia local els hi pregunta el nom, i quan el senyor Hajjar el diu, el guia diu *Rafa! Como Nadal! Vamos Rafa!* i riu endinsant-se a la terra, mentre el Rafah està trist però pensa que al menys no han escrit el seu nom amb dues effes.

Seguint els seus plans, entren a KV62, fins situar-se a la càmera mortuòria. Les pistes els hi diuen que, enfrontada a la porta de la cambra del tresor, es troba una nova cambra, a poder ser sense músics. El Jordi pica la paret al ritme del la musiqueta del Mario, mentre el Jordi balla la Macarena en calçotets. De sobte, cau la paret i davant seu s'obre una habitació. No hi ha tresors, uns telecos se'ls havien emportat un dia que hi havia Festa Gran i no els permetien entrar a la facultat. Però a la paret hi ha uns jeroglífics que, quan traduïts, posen (sense conjugar perquè les declinacions en egipci no estan clares):

a) Trobar tots els enters positius n tals que $\phi(n\phi(n)) = n$

b) Demostrar $\frac{1}{2}n\phi(n) = \sum_{1 \leq k \leq n, \gcd(k,n)=1} k$

La meva demostració ser massa llarga per cabre en aquesta paret

Irònic, pensen els nostres protagonistes, que no tingui espai quan la resta de les parets estan buides. Com haureu vist a les puntuacions, els Tutankamons no saben resoldre els problemes. Ajudeu-los resolent aquests dos problemes.

311. La coma del vocatiu.

Els grammar nazis estan entre nosaltres. Tenim que eliminar-los. Però al menys en català no fem laismes. *Dala el regalo*. Per sort, al col·legi em van ensenyar que una forma excel·lent de molestar als qui t'emprenyen és quedar-se pàlid i tractar-los com moluscs. Be, aquí el problema: Sigui G un grup finit amb la següent propietat: Si f és un automorfisme de G , llavors existeix m enter positiu tal que $f(x) = x^m$ per tot $x \in G$. Demuestra que G és abelià.

Bé, això són 6 punts. Si voleu un set (o un ú), si us plau puntueu aquest paràgraf sobre la importància de la coma.

És molt important la coma Abel. Abel abel cómo te lo digo. A casa sempre ens deien: anem a menjar nens. Fins i tot quan anàvem a Sitges a una arrosseria i jo deia vull menjar negre! Al final no hay nada más importante que la coma Abel. En qualsevol idioma que es parli a la torre de Babel Abel. Abel ves amb compte quan et tallis el cabell perquè no et quedi flabel·liforme Abel. Espero que hagueu resolt el problema del grup abelià perquè com l'Abel hi ha poca cosa. A belces pienso que esto de los enunciados se me va de las manos compañeros. Segurament no us faci cap gràcia però ajo i agua. El cas que feu servir la coma que és molt important i que si no a l'Abel li donen embòlies no abelianes. Oi que sí Abel?