

XXVII Materó de Problemes

1 de març de 2023 — 16:00

Bloc II - Matemàtiques del social

111 emoji 1F633

El vocabulari del jovent és cada vegada més limitat. A dia d'avui està essencialment limitat a *bruh*, *èpic*, *padreada*, *rizz*, *permatragas*, *uxiono*.... Tot i així, *lingüistes experts vaticinen que la cosa encara anirà a pitjor*¹. Estudis recents mostren que d'aquí poc l'abecedari es reduirà a *emojis* i a les tres (3) lletres *S, U, Y*, i que amb aquestes només podran formar paraules seguint el següent procediment:

1. Comença amb la lletra *S*.
2. Quan una paraula acaba amb una *S* pots afegir-hi una *U* o una *Y*.
3. Pots triplicar la cua d'una paraula després de qualsevol *U* (eg: $YUSY \rightarrow YUSYSYSY$).
4. Pots substituir *SS* per Y^2
5. Pots eliminar qualssevol *YY* de la paraula.
6. Quan una paraula acaba amb una *U* pots afegir-hi una *S*.

Els organitzadors de la Materó creuen que aquestes prediccions són altament acurades, però temen que el lèxic català es veurà afectat de manera greu. Ajudeu-los a determinar si la paraula *SUSSY* estarà al lèxic del jovent del futur, o si podem detonar ja tot l'armament nuclear del planeta.

120 La hipòtesi de la contínua

L'altre dia pel passadís de la FME hi havia un integrant de la Secta Adeu que es queixava dels problemes de la materó abans d'haver-ne vist cap. Amb poc criteri, l'Ander demanava problemes de teoria de nombres i combinatòria de caixes i boles. Hem pensat aquest problema perquè el gaudeixi.

Sigui $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$ i esta fitada en tot subinterval finit de $(0, \infty)$. És cert que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$? I si f és contínua? Demostrea o troba un contraexemple en cada cas.

133 La Ivet dissenya un algorisme genera-arestes

En una festa de la FME hi ha unes quantes persones,³ i òbviament, totes elles van calentes. Tot i així són molt tímides i es volen liar *només* amb qui tenen mes a prop. Ull! això de voler-se liar amb una altra persona no és pas simètric (procedeix a plorar pensant en ella). Per sort, l'esperit de la Ivet encara visita les festes i diu que per generar salseo és suficient col·locar les persones a la festa de manera que estiguin totes elles a distàncies diferents. Demostreu que, efectivament, d'aquesta manera com a mínim tindrem una nova aresta al graf.

¹links per aquells nascuts després del 2001.

²El jovent del futur és antifa, almenys.

³lol

200 Vols veure fotos del 5A2-C1/\$2mdf que hem fet?

En Jofre, en Tibau i en Majó tornen un dia d'assaig i venen discutint la nova crush tenen a la colla. Com que en Jofre n'està fins al collons que discuteixin sobre qui li tirarà la canya primer, decideix proposar-los el següent joc. En Jofre tanca en Tibau i en Majó en una saleta CFIS i escriu a la pissarra el següent polinomi: $x^2 + 2021x + 2023$. Aleshores, per torns, en Tibau i en Majó canviaran els coeficients del polinomi, augmentant o disminuint en 1 els coeficients de grau 1 o 0. L'objectiu del joc és arribar al polinomi $x^2 + 2023x + 2021$, moment en què els dos baixaran al bar a tajar-la. Ara bé, en Tibau guanyarà si, durant algun moment del procés, el polinomi escrit en la pissarra té arrels enteres. D'altra banda, en Majó guanyarà si aconseguix que en cap moment això passi. Finalment baixen a tajar-la. Qui podrà tirar la canya a la crush a la pròxima diada?

210 La pastanaga interplanetària

En Pau Mas i en Jordi Lluch ja s'han cansat de sempre guanyar a la pastanaga i s'han inventat una nova versió: la *pastanaga interplanetària*. A diferència de la pastanaga tradicional, no s'hi juga només a la FME, sinó sobre n planetes del mateix radi r , i només pots matar a un altre jugador si l'acte no es pot veure des de cap altre planeta. Quina és l'àrea total sobre la que podran matar algú?

240 Basquetball gaming

Els de la resi de l'Aleu han decidit fer un torneig de basquetball, aprofitant que tenen la pista al costat i que no han de cuinar-se el dinar. Han quedat a les 6 de la tarda, però en Juanbri ha baixat abans per tenir-ho tot preparat. Ha pensat que, per tal de fer el torneig més just per tothom, es canviaran les normes clàssiques. Suposem que hi ha n divisible per 6 persones de la residència que participen, i que formen 6 equips. Les normes que ha proposat el Juan son les següents:

- Es jugarà amb $n/2$ pilotes de colors diferents, i cada cop que algun equip faci un punt es canviarà la pilota a una aleatòria entre les $n/2 - 1$ restants.
- Sempre que es faci un punt amb una pilota que ja ha sortit abans (és el k -èssim cop que es fa punt amb aquella pilota), el punt contarà k punts.
- El primer equip que arribi a un nombre primer de punts $p > n$, haurà guanyat el partit i es començarà el següent partit.
- Quan un partit acaba, el següent partit es jugarà entre 2 equips dels 6 escollits de forma aleatòria, fins i tot pot passar que sigui contra l'equip amb qui acaben de jugar.
- El guanyador del torneig serà el que guanyi contra tots els altres equips.

Un cop arriben els altres jugadors al camp, en Juanbri els explica totes les normes. En Jordi Herrero, però, jugador professional de bàsquet, observa que realment els equips que tenen un jugador de bàsquet professional segueixen tenint avantatge per sobre dels altres. De fet, estima que en aquesta situació guanyen un partit amb probabilitat 60%. Això es deu a que els jugadors de bàsquet son molt alts i, per tant, la distància del jugador a la cistella $d(j, c)$ és menor a la mitjana. La Lucía Aparicio troba tot això absurd i torna a la habitació de la resi a fer el següent problema. Sigui $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successió de naturals tots diferents i u_n el mínim comú múltiple dels n primers termes de la successió. Demuestra que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ convergeix. La podeu ajudar?