

XXVII Materó de Problemes

1 de març de 2023 — 17:00

Bloc III - Proves cangur

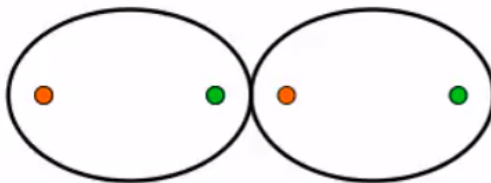
315 Topology: The study of adding tasty toppings

L'Enric Ventura es va mirar els problemes de la marató d'antany i es va adonar que anava una mica perdut amb això dels donuts. Mirant-s'ho es va plantejar si existeix una corba densa al tor.¹ La seva mà esquerra li deia “Està clar que no, sinó hauria de donar voles així”(mà movent-se frenèticament), però la mà dreta no ho tenia clar i no sabia per on començar a demostrar res.

Els Incompactes just han començat a fer topologia i creuen que ja poden resoldre la qüestió. S'han passat de llestos?

360 Que fàcil és la vida de Pagès...

L'Eloi Pagès està jugant al pati fent dibuixets d'el·lipses a la sorra i se li ha acudit el següent problema. Ha cridat en Bernat Pagès i s'han col·locat als focus de les el·lipses per tal de dibuixar la següent figura: dues el·lipses congruents en mida i inicialment amb els focus en la mateixa recta.



Si fem rotar l'el·lipse esquerra al voltant de la dreta, que es manté fixa, de manera tangent i sense lliscar, quina trajectòria descriuen els focus de l'el·lipse esquerra?

372 Lamamadelamamadelamamadelamamadelamamadelamamadelamamade

Suposem que em tiro a la teva mare i tu, com a venjança, et tires a la meva. Aleshores, jo seria el teu pare i, per tant, seria també el meu propi avi, rebesavi... i en conseqüència, seria el teu fill i, per tant, seria també el meu propi net, rebesnet...

Ara considerem que som un grup d'amics i cadascú s'ha tirat la mare d'algun altre. Quina és la condició suficient i necessària per a que jo sigui el meu propi pare?

¹És a dir, que la seva clausura és tot el tor.

400 Reject determinism, embrace probability

L'Izan, tot i haver-se passat a mates, mai ha perdut el seu esperit fiber, i ha decidit començar una campanya de “*Reject determinism, embrace probability*” en la que es defensa que els algoritmes probabilístics també són algoritmes.

Per fer publicitat ha proposat un problema en el que trobar la solució és impossible, tot i que pots apropar-te a la solució de forma exponencial, però s’ha oblidat de quin era l’algoritme per fer-ho. El podríeu ajudar?

Sigui x un vector de \mathbb{Z}_2^n fixat i sigui A_x una funció tal que si r es un vector aleatori aleshores es compleix $Pr(A_x(r) = \langle x, r \rangle) > 3/4 + \varepsilon$ amb ε fixat no negligible, on $\langle x, r \rangle$ producte escalar mòdul 2. Dona un algoritme B que trobi x amb probabilitat molt alta (la probabilitat de fallar decreix exponencialment en n) en que cada pas s’avalui uns $O(n)$ cops A_x .²

420 FME - F, Meteorits Espacials!

La Terra està en perill, i en conseqüència la FME! Degut al canvi climàtic han començat a caure meteorits de l’espai i, per tal de salvar els estudiants de la seva facultat preferida, s’han reunit en David Lecumberri, l’Andreu Moll i en Pau Sabater. Han vist que cada meteorit que cau deixa inhabitable la semiesfera de la Terra que té el meteorit com a centre (suposant, és clar, que la Terra és una esfera...).

Els 3 estudiants, per tal de salvar la facultat, volen esbrinar si hi ha algun punt de la Terra que no quedi afectat per cap meteorit i així endur-se un troç de gespeta i anar-hi tots a sobreviure. Si suposem que cauen n meteorits de forma aleatòria a la Terra, quina és la probabilitat que tal lloc existeixi?

3

480 Yo es que soy finitista

Els Desmenelaos estaven ajudant al Bernat i al Roger a estudiar per càlcul I quan es van trobar un antic límit proposat per en Rivero. Sigui $P(x) = a_m x^m + \dots + a_0$ amb $a_i > 0, i = 0, \dots, m$ i siguin A_m i G_m les seves mitjanes aritmètica i geomètrica dels números $P(1), \dots, P(n)$. Calcula el límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_m}{G_m}$$

Després d’una acalorada discussió acaben concloent que el límit ha de ser infinit. Però en aquell moment passa en Donato, es mira la pissarra amb el resultat, i en la seva infinita saviesa finitista els hi diu: Nah bros això de l’infinit no existeix! Aquest límit val $\frac{e^m}{m+1}$. Qui dels dos diries que té raó?

²Un algoritme es una sequencia finita d’instruccions que fan un calcul. Podeu fer servir una font d’aleatorietat perfecta si us es necessari (un random oracle).

³No, no ens rebaixarem al nivell de fer la broma. L’haureu de fer vosaltres.