

XXVII Materó de Problemes

1 de març de 2023 — 18:00

Bloc IV - Final de GD 2022

500 Yet another problema de la gent de la FME liant-se

A la FME la gent es lia massa, i en Marçal Font, encarregat d'actualitzar el graf diàriament, ha vist que el servidor ja no te memòria suficient com per guardar totes les arestes.¹ Mentre busca una forma d'arreglar el problema, en Javi Ruiz ha analitzat el panorama i creu que ha trobat una manera d'evitar que la gent es lii, per així poder sempre tenir el graf al dia.

En Javi ha vist que si modelem la FME com una circumferència de radi $\frac{1}{4}$ i ordenem les N persones de la FME per edat, les persones n i m de la FME es liaran sii la distància entre elles, $d_{m,n}$, compleix $(m+n)d_{m,n} < 1$. En el model d'en Javi, la distància entre dos punts de la circumferència és la llargada de l'arc més petit que els uneix. En Javi creu que ha trobat una manera de situar les N persones de la FME de manera que no es liin, però pensant en el fet que l'any que ve incrementarà dràsticament el nombre d'estudiants de nou ingrés, es pregunta: quin és el màxim nombre d'estudiants que admet la FME de manera que es puguin situar sense que es liin? Digues quina de les tres opcions és la correcta.

- La FME com a molt pot tenir 8 estudiants.
- La FME pot tenir més de 8 estudiants però existeix un límit.
- La FME no té límit d'estudiants que pot tenir.

550 Conoces a Fernando?

Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que la imatge de cada conjunt arc-connex és arc-connex, i la imatge de cada conjunt compacte és compacte. Demuestra que f és contínua.

És això cert si la funció és entre dos espais topològics qualssevol?

El que tengo aquí colgando.

630 DIDMDSVL

El 14 de febrer ha deixat de ser Sant Valentí, i ara és el Dia Internacional Dels Mems De Sam Va Lentín (DIDMDSVL). Cada any, quan arriba el DIDMDSVL, el grup de "Mems. I prou." s'omple de *shitposts* i *mems* de SVL, i fa gràcia fins que la quantitat de *mems* arriba a la escala dels 5GB.

En Rubén Aciego es lleva i s'adona que s'havia oblidat de desactivar la descàrrega automàtica del *whatsapp*, però ja és massa tard. Ha rebut masses *mems* i ara toca esborrar-los tots. El seu mòbil té la opció d'"esborrar tot", però no funciona del tot bé: esborra cada fitxer amb probabilitat p de manera independent cada cop que el clica.

Abans de posar-se mans a la feina, necessita la vostra ajuda per averiguar quanta estona trigarà a esborrar tots els *mems*. Calculeu el nombre esperat de cops que haurà de clicar l'"esborrar tot" fins

¹lol

que no quedi cap *mem*.

Ajut. Tingueu en compte que: $(n + 1)^k - 1 = \sum_{r=1}^n (r + 1)^k - \sum_{r=1}^n r^k$ i el principi d'inducció.

803 Rouritos desnutrits

El Roura ja porta temps fent servir els Rouritos per a que facin la seva feina a canvi de galetes i cacaolats, però el nivell els últims anys ha baixat molt mentre que les exigències de la universitat només fan que pujar. Ha arribat a la conclusió que millor deixar de gastar diners en berenar i en canvi invertir el seu temps en escriure un programa que s'escrigui ell mateix, i que així es faci la feina sola. Com a bon Rourito vols demostrar que tu també podries fer aquest programa, fins i tot sense cacaolat.

Fes un programa amb el teu llenguatge de programació preferit que faci un *print* d'un *string* que sigui una còpia exacta del programa. Per assegurar-te que et guanyes el respecte d'en Roura, que de fet és amic de la Materó, fes servir només *strings*, variables i funcions que defineixes tu mateix, i no fagis servir coses gaire idiosincràtiques del llenguatge escollit.

1000 Tiroliro tiroliro, tiroliro tirolà

Des de que va guanyar el premi al rei del carnestoltes, l'Amadeu Carceller sent que mai arribarà a un punt més àlgid, i està una mica apagat. Per animar-lo, en Damià Canyameres i en Ferran Poca han decidit pintar el seu món de colors. Concretament, han pintat \mathbb{Q}^n de tal manera que tot parell de punts a distància unitat tinguin colors diferents. Quants colors han necessitat?

1010 Why was Fibonacci afraid of 5?

Because 5 8 13

Després d'una llarga i feixuga reunió del deganat de la FME, s'ha decidit eliminar les demostracions per inducció a la facultat. Es consideren barroeres, i no està clar que realment funcionin. Que només amb el cas 0 ja tens els altres? Estàs tu!

En Jaume Martí, però, considera que sense inducció els estudiants no sabran demostrar molts dels resultats que es demanen als exàmens de la FME. Demostreu-li al Jaume que no la necessiteu per res pel següent problema. Prova que

$$F_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2} + k}{2k},$$

on F_n és l' n -èssim nombre de Fibonacci.