XXVII Materó de Problemes

2 de març de 2023 — 12:00

Bloc V - Per compensar el problema *sus*, hem fet aquest bloc fàcil.

1011 [Espai reservat per a spots electorals]

L'últim escàndol d'Ada Colau: una matriu circulant per Barcelona. Gràcies, Ada, com si el trànsit no estigués ja prou congestionat...

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{0!} & & \frac{1}{(n-2)!} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{0!} \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Mentre espera que el semàfor de la superilla es posi en vermell, aquesta pobra matriu està tenint una crisis existencial per determinar el seu futur. Podríeu ajudar-la i trobar quant val $\lim_{n\to\infty} \det C_n$?

1020 FOTOmami

Considerem les matrius de nombres reals $n \times m$, amb $n, m > 2$. Diem que una matriu és una FOTOmami si compleix que $a_{ij} = \frac{1}{4}(a_{i(j-1)} + a_{i(j+1)} + a_{(i-1)j} + a_{(i+1)j})$ per tot $(i, j) \in [2, n-1] \times [2, m-1])$.

La Rosalia vol treure un nou àlbum i es pregunta si, donades les vores de la portada: v_{1j}, v_{nj} per $j \in [1, m]$ i v_{i1}, v_{im} per $i \in [1, n]$, existeix alguna matriu que sigui una FOTOmami i coincideixi amb les vores que ella vol. (És a dir, a_{ij} FOTOmami i $a_{1j} = v_{1j}, a_{nj} = v_{nj}, a_{i1} = v_{i1}, a_{im} = v_{im}$)

Podreu assegurar-li que existeix?

1071 El veritable Capitán Pescanova[1]

L'Edu Simón tira[2] la canya a tot déu. Visualitza la pista de ball com un graf d'n vèrtexs i va rondant deixant-les anar (*aiii guapoo, que haces aquí?*). Diu que només fa falta tirar-li la canya dos cops a algú per lligar-se'l, i que, de fet, ho pot fer amb els ulls tancats.

Una nit s'està intentant liar amb un Macedoni M, ubicat a un vèrtex de la disco que l'Edu desconeix. L'Edu va rondant llençant-les amb els ulls tancats quan ho troba adient, i quan li tira per primer cop a l'M, aquest es mou a un vèrtex adjacent sense dir res (i per tant l'Edu no se n'adona). L'Edu segueix fins que torna a acertar amb l'M, moment en que es lien allà mateix. Quin és el nombre mínim de cops que l'Edu ha de tirar la canya per garantir que es liin?

Nota 1: L'Edu pot anar a qualsevol vèrtex de la disco sense haver de passar per un camí. Remarquem que l'Edu té una estratègia, no va llençant-les aleatòriament.

Nota 2: Podeu posar la solució en termes de propietats del graf.

Nota 3: La pregunta val 6.9 punts. Per l'última dècima, ajudeu a l'Edu a trobar una manera de tirar la canya prou bona com per a que només ho hagi de fer un cop a la pròxima festa que vingui.

1100 Tortugues asiàtiques de fusta *Dabloings*

El Marçal Font, a part de ser un gran cineasta, matemàtic, músic, compositor, físic i creador de mems, és un reconegut col·leccionador de tortugues asiàtiques de fusta. Tal i com fan els col·leccionistes de tortugues asiàtiques de fusta, en compra diverses (possiblement alguna d'elles repetida). Llavors, les guarda en diferents capses, on cada capsa en pot tenir diverses (o cap), cap capsa en té una de repetida i no hi ha dues capses iguals (és a dir, amb les mateixes tortugues).

El Marçal, però, és molt exigent, i no acceptarà tenir cap col·lecció que no sigui *Dabloing*: una col·lecció serà *Dabloing* si cada tortuga apareix un nombre parell de vegades en la suma total de les capses.

Si hi ha n tipus de tortugues asiàtiques de fusta diferents, podeu demostrar-li al Marçal que el nombre de col·leccions *Dabloing* sempre serà una potència de 2?

Nota: La col·lecció amb cap capsa és *Dabloing*.

[1] No prometem que aquest és l'últim que va de lligar a la FME.
[2] Tirava. Recordem, de nou, que això ja no va de tradicions.

1101 El d'àlgebra, però no tradicional

Des de que en Barja ha començat a donar AL de primer, els novatos ho saben tot sobre polinomis mínims, subespais invariants, formes de Jordan, i tot això. Com que veu que ho pillen tot molt ràpid, en Barja li ha dit al Kamil, el becari, que l'any que ve posarà el següent problema al parcial.

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. amb $\mathbb{K}$ algebraicament tancat, i A i B endomorfismes d'E tals que:

- A i B commuten.
- E descomposa en subespais de VEPs d'A i, per qualsevol VAP, el subespai de VEPs associat és de dimensió finita.
- E descomposa en subespais de VEPs de B.

Demostra que E descomposa en subespais de VEPs de $(A^{69} + B^{420})^{80085}$.

En Kamil, que no ha fet AL amb en Barja, creu que potser ho podria fer quan E és de dimensió finita. Els droGauss tenen l'AL per la mà i diuen que ho poden fer fàcil per e.v.s arbitràris. Qui treuria la matrícula a AL si la tornés a fer?

1110 El de la Míriam

S'ha filtrat la solució del problema 1110, que era el problema de la Míriam. Per no fer-vos-ho massa fàcil us ensenyem una foto redactada del que s'ha filtrat.

El problema era molt bonic, i us el farem escriure de totes maneres. Calculeu

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k}.$$

Podeu fer feliç a la Míriam?