

XXVII Materó de Problemes

3 de març de 2023 — 12:00

Bloc VI - Ja prou siusplau (*the musical*)¹

1134 Missió: que ella m'estimi

Chan, Chan, chan chan Chan, Chan, chon chon CHAN, CHAN, CHAN CHAN CHAN, CHAN, CHON CHON L'Éncinaaaaaas... Vá veureeee... que la primera integral de la primera llista va causar una mica de problemes entre els concursants de la Materó. El pobre no entenia com els seus alumnes eren incapaços de fer un simple canvi de variable. Després de comunicar les seves preocupacions a en Pere Pascu, van arribar a la conclusió que el millor que podien fer per animar als alumnes era posar-los una altra integral. Aquesta, sense trucs, i fàcil de veritat! Poseu-vos la [cançó](#), a veure si així aquest cop la podeu fer!

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{x} \right]^{-1} dx$$

1148 Eeeeeeh Macarena a_k !

Els $p\epsilon$ es troben a la pista de ball i comença a sonar [EL TEMACLE](#). Paren de no liar-se amb ningú i es reuneixen a l'origen de la pista per acordar un polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ a coeficients reals amb el que sincronitzaran el seu ball. Quan comença a sonar *Dale a tu cuer-polinomio Macarena...* avancen a_0 unitats fins el *eeeeeeeeeh Macarena* i fan el quart de volta, disposant-se a avançar a_1 unitats en la nova direcció. Inductivament, si van per l' a_{k-1} , mentre sona *Dale a tu cuer-polinomio Macarena...* avancen a_{k-1} unitats fins cridar *eeeeeeeeeh Macarena a_k !*, moment en que fan un altre quart de volta per continuar amb el pròxim coeficient. Demostra que sempre tornen a l'origen després de les n tornades si, i només si $x^2 + 1$ divideix el polinomi.

¹L'equip de la Materó recomana resoldre els problemes amb la banda sonora suggerida de fons. Excepte el 1200, en realitat no ens agrada gaire la pegatina.

1200 Passa res, si la Roomba em dona trempera?

Ara mateix estareu pensant tots: *I en una altra vida vaig ser estudiant... Tirant tirant, i anar tirant! Patada al cul, i pels parcials, M'hauré d'espavilar!* També potser se us passa pel cap: *Vaig voler fer les set llistes, Amb gràcia i tot bé, Però tot just en duia 5 i la 6 se m'endugué!* Esperem que no sigui així, però si és per culpa d'algun problema, és aquest.

Un robot... *robot Roombeeruu* està netejant una habitació quadrada de costat 1. A l'inici, es troba a la cantonada inferior esquerra, però comença a moure's en línia recta, sortint amb un angle inicial $\alpha \in (0, \pi/2)$. Cada cop que es troba una paret, diu: *Sóc incomformista o és Que em falta decisió?* i acaba rebotant seguint la llei de reflexió.

Fixat n natural, suposa que la Roomba està programada de manera que s'atura si alguna de les següents situacions es dona:

- Arriba a una cantonada, ja que es queda encallat i s'atura. (*Al cantó sempre s'hi està bé, Quan no queda lloc on anar...*)
- $r_W + r_E = n$, on r_W, r_E són el nombre de rebots a les parets oest i est, respectivament, i sense comptar la cantonada inicial de sortida.
- $r_S + r_N = n$, on r_S, r_N són el nombre de rebots a les parets sud i nord, respectivament, i sense comptar la cantonada inicial de sortida.

Si a_n és la quantitat d'angles inicials per als quals la Roomba xocarà amb una cantonada, trobeu el valor de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{s+1}}$$

per $s > 2$ un nombre real donat. Recordeu, *Tirant tirant, i anar tirant!*

Nota: enteneu la posició del *robot Roombeeruuu* com un punt que no ocupa espai.

1300 Da ba da dan dee dee dee da nee na na na

Dee dee na na na! Diem que un nombre n és *Saturday Night* si es pot fer un quadrat d'àrea n amb vèrtexs els punts amb coordenades enteres de la disco (i on fem tots el ball a dins). Per exemple, 1, 2, 4, 5, 8, 9... són *Saturday Night*. Demostreu que si dos nombres són *Saturday Night* el seu producte també és... *Saturday Night, a wichi wichi waaaaa... Prity baybeeee.*

1302 Ella perrea como Taylor

Per com han anat les primeres llistes, sembla que *Nena tu aún eres novata*, i potser també que *Ya vas por tu tercer cubata...* Però per sort *No hay quien te pare, llevas racha, cuando vas borracha*, i pel que fa als problemes, sabem que d'ara en endavant *caen de uno en uno, es un asesinato en masa*. Confirma-ho demostrant que donada f tal que

*Ella perrea como Taylor, del 0 a la r,
Suben los grados, positivos y crecientes (Caliente, caliente)
Cuando derivas es convexa como Jensen,
Llavors converge.*²

Pista: [Aproxíma-la, aproxima!](#)

1330 Vull ser policia (per posar endevinalles)

Estimada Mare,

Després de molta deliberació he prè la decisió d'inscriure'm a l'acadèmia per ser Policia. Després de quatre anys d'estudiar matemàtiques, he vist que les sortides a empresa no m'omplen malgrat els salaris elevats, i el món de la recerca és massa competitiu per l'estil de vida que m'agradaria dur. Fer-me Mosso m'ha semblat una opció ètica, ja que és una manera en que puc fer una contribució directa a la societat i treballar per fer de la nostra comunitat un lloc més segur i just per tothom. A més, és una feina prou còmode com per dedicar el temps que faci falta als teus futurs nets! Quan em gradui de l'acadèmia faré servir la meva posició per ajudar a aquells que hagin estat tractat injustament pel Sistema, intentant treure de l'empresonament aquells que no se'l mereixin. El meu criteri, òbviament, serà el següent.

*Posaré a 10 presoners A, B, \dots, J en ordre en una fila i els posaré un barret aleatòriament a cadascú dels meus 11 barrets de colors diferents. Cada presoner podrà veure **només els barrets d'aquells que té davant** (l' A els podrà veure tots excepte el seu, és clar, i el J cap). L' A haurà de provar d'endevinar el color del seu barret, i **tots el podran escoltar**. Després ho provarà el B , i així fins al J . Però*

²Sigui f una funció positiva amb totes les seves derivades positives a l'interval $[0, r]$. Demuestra que la sèrie de Taylor convergeix a f per a tot $x \in [0, r]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \forall x \in [0, r].$$

no podran dir un color que s'hagi dit anteriorment! Els alliberaré a tots si encerten tots els colors. És clar que els presoners sabran de quins colors són els meus barrets i els donaré prou temps per pensar una estratègia.

Sempre has estat tan bona mare! Em podries ajudar a esbrinar amb quina probabilitat els alliberaré a tots?

Amb molt d'amor,

Mater

PD: Has vist la nova campanya de l'Anglada? Quin personatge més pintoresc!