

XXVIII Marató de Problemes

Kiwis (millor generació) - 5 de Març 2024

BLOC III: We are never ever solving problems together

55. Caminos de pito

El Juanjo està molt ocupat aquest any. Per impressionar a la Maripaz s'ha posat un repte molt difícil. "Així és Com aconseguixes la noia" explica confiat als seus amics. Com que a la Maripaz li agrada en el seu temps lliure comptar coses, s'ha plantejat quants Camins de Dyck hi ha de llargada $2kn$ tal que els passos ascendents estan en grups de k passos consecutius. Pots ajudar al Juanjo a fer realitat aquesta Història d'amor?

330. Basada? Basada en què?

Des de l'organització de la marató hem determinat que la base 10 és molt avorrida, i la base 2 massa friki (fiber = cringe). Així doncs, hem creat una base tan basada com nosaltres: la base ϕ .

Recordeu que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aquesta base només fa servir uns i zeros com a xifres. Com és habitual, un 1 a la posició n -èsima, per $n \in \mathbb{Z}$, val ϕ^n . Observeu que el mateix número pot escriure's de maneres diferents (bastant èpic si ens preguntem). Per exemple, el número 10,01 -que equivaldria a $\phi^1 + \phi^{-2}$ - i el 1,11 serien 2 en base 10 i 10 en base 2 (també bastant èpic). Diem que una base està basada si pot expressar números naturals amb exactament 2024 uns i la resta zeros. Demuestra que la base ϕ està basadíssima, és a dir, que existeixen infinits números naturals que es poden expressar d'aquesta manera.

462. Believer

Tothom sap que el Leo és un **Believer**. Després d'una Epifania, s'ha il·luminat i ha quedat al pati de la FME amb el Cabré per preguntar-li un dubte de EDPs. Com fent-se preguntes se'ls hi allarga massa la classe, solucionaran les seves preguntes amb un joc que s'ha inventat en Leo.

Suposem que hi ha n Boles de discoteca on n és divisible per 6 i hi ha 6 colors amb el mateix nombre de Boles de cada color. Les normes són les següents:

- Les Boles es separen en tres grups de dos colors cadascun. Aleshores, si la resposta ha estat satisfactòria per l'adversari es canviarà una Bola de grup aleatòriament i es sumarà un punt pel que ha fet la pregunta.
- Sempre que es triï una Bola que ja ha sortit anteriorment, la pregunta comptarà k punts quan hagi sortit k vegades.
- El primer dels dos que arribi a un nombre de punts primer p més gran que n serà el guanyador de la ronda.
- Quan una ronda acaba, les Boles d'un color es canvien de color proporcionalment de manera que quedi un color menys (afegint si fes falta per a que hi hagi un nombre enter)
- El primer en arribar a 3 rondes guanya.

Un cop arriben els dos al pati, en Leo explica totes les normes. En Cabré, però, observa que ell hauria de respondre una pregunta amb probabilitat 60 %, mentre que en Leo, amb menys Experiència donant classe d'EDPs no supera el 50 %, però que anirà augmentant a cada pregunta que respongui per 0.5 punts percentuals, i pot arribar fins al 100 %. L'Albert Mas troba tot això absurd i per no fer-s'hi Mala sang torna a casa seva a descansar. Preparant la classe del dia Següent s'adona que no sap resoldre un sumatori que es troba al peu de la última pàgina de problemes.¹ El podeu ajudar?

11. Jesús et posa un challenge

El Jesús està comprovant que no ets un tio random de filologia que s'ha colat a la fine (ha passat), encerta o mor. Siguin f_m, f_{m+1} dos polinomis homogenis en n variables, amb graus consecutius $m, m + 1$, i sense divisors en comú. Prova que el polinomi $f = f_m + f_{m+1}$ és irreductible.

462. La generació que salvarà festes!

Fa molts anys les quatre nacions vivien en harmonia, però tot va canviar amb l'atac del rectorat. Només els Kiwis podien fer que les Festes fossin un complet èxit. Però quan la facultat els necessitava més, el seu termini com a festes va acabar. Aconseguirà 2003 mantenir les festes, o Estan acabades ara? Tornarà la facultat a ser beneïda amb l'increïble Estil de les nostres Samarretes i dessuadores? Tindran el Tibau i la Hanna més oportunitats de tornar a Ballar amb les mans lligades en una abraçada de passió i desig? Aconseguirà la Laura Navarrete fer un TikTok de festes, o deixarà per fi els matfis en Pau ?

Desde l'equip organitzador d'aquest Marató no creiem que sigui possible determinar si hi haurà continuïtat de les festes o no (esperem que sí), però si que us demanen que doneu el conjunt de punts de continuïtat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \cos(q) & \text{si } x = p/q \text{ amb } \gcd(p, q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

165. Grups trivials

Els matfis de segon estan jugant al trivial a la sala CFIS (perquè els de quart han guanyat fàcil i ja s'han retirat). El trivial és tan antic que no poden llegir la pregunta escrita a la targeta, així que en comptes de jugar al Monopoly o al Mastermind o qualsevol altre cosa, com faria qualsevol persona normal, l'han substituït per una de matemàtiques. La pregunta del formatget que els falta per guanyar és la següent:

Digues quin és el màxim Cardinal del subconjunt (no subgrup) del grup S_n tal que no existeix la solució $ab = c$. a, b i c poden ser el mateix element. Series capaç de guanyar al trivial, o continuaries atrapat a les portes final del joc?

¹

$$\cot \left(\sum_{n=1}^{2024} \cot^{-1} \left(1 + \sum_{k=1}^n 2k \right) \right)$$