

XXVIII Marató de Problemes

Kiwis (millor generació) - 5 de Març 2024

BLOC V: Just another problem to burn

495. El Rivero s'ha enfadat

El Rivero s'ha aficionat Últimament a escriure les seves **reflexions a X** (formerly known as Twitter). En aquesta fantasia literària (amb dubtosa credibilitat) s'ha trobat un Amor apassionat fruit d'una capritxosa coincidència del destí. Però al Rivero no li agraden las coincidències, al Rivero li agraden les matemàtiques. Per això el Rivero ha decidit escriure un poema a la seva obsessió: ¿un **podcast random**¹ de ciclisme? no. La teoria de nombres. Un poema tan bonic que el recitarà cantant, i dirà orgullós: és la Nostra Cançó.

*Galego do 94 soy,
entretenido con el ciclismo siempre estoy.
Entre clase y clase de geometría,
en Twitter alguien siempre me la lía.*

*Una porra de ciclismo, un verso letánico
tristemente enfatizados por la falta de metálico
hacen del galego un hombre corriente,
aunque a veces en las redes se caliente.*

*Cerca de casa ha acabado, ¡Quién lo diría!
trabajando con ilusión día a día.
Su clase de geometría le da la vida,
pero de la teoría de números no se olvida.*

*Tan profunda tiene esta afición
que la lleva dentro del corazón.
Pues le ayudaría con algún gran dilema
si consigues resolver este problema*

Troba les solucions (a, b, c) amb a, b, c enters positius tals que:

$$a^2 + b + c = abc$$

220. {1}

Per ser un gran tiburaçao, un s'ha de mostrar sempre imponent, impassible i inabastable, però mai Innocent. Per exemple, si sortim al butlletí cfis, quina foto enviarem? Una somrient i intentar semblar amables, com la de l'Anna, que viu al País de les meravelles? No. Enviarem una en tirants, traient pit perquè se'ns vegin els músculs i amb Cara seria i intimidant, com la d'en Gabriel.

O si ens trobem amb un conjunt *subnormal*, d'aquells que el seu cardinal es igual a la mitjana aritmètica d'algun dels seus subconjunts, que farem? Ens aproparem a ell tímidament a preguntar-li si és *màximament subnormal*, d'aquells que no tenen cap subconjunt propi que sigui subnormal? No. Ens imposarem a ell,

¹para los haters del reggaeton, el podcast comienza en el minuto 1:10

forçant que ens respecti (Fixeu-vos de nou amb el Gabriel: no hi ha ni Un lloc en aquest món on no se'l respecti), i pràcticament sense mirar-lo ens posarem a comptar quin és el nombre de subconjunts màximament subnormals de $[n]$.

Mentalitat de tiburao.

924. Súper topologia

Com bé sabreu, el Nostre molt honorable president de la dele Adrià Ferrer (aka *Presiadri*) acabarà en poc la seva candidatura i està organitzant reunions a tort i a dret per trobar el seu successor. En el fons del seu cor li agradaria veure unes noves eleccions tan plenes d'emoció i neguit com ho van estar les seves, però van passant els dies i, a falta de candidats, ha llençat la tovallola.

El que ell no sap és que els *aleuers* de segon, inspirats per la gloriosa campanya a la **Presiberta** que va començar un Estiu cruel fa dos anys en mans dels iaies *aleuers*, tenen una sorpresa preparada ara que És la maleïda temporada electoral un altre cop. Porten mesos planificant una campanya electoral secreta a la Lucía, sense que ella en sàpigui res. Per a que vegueu la Magnitud del projecte, només cal dir que el Manu, matesdades i rourito de tot cor, ha hagut d'aprendre programació de veritat per fer la web de la campanya.

Però uns pocs dies abans de l'empaperat de la facultat va succeir el desastre, ja que anant a l'habitació de l'Álvaro a jugar a la Switch la Lucía va poder veure, amagat darrera de llibres de biofísica de color Granat, un ninot d'ella mateixa amb una banda presidencial. Fins al cony de que li encasquetessin feines sense cobrar, la Lucía (aka Presidenta de la *OIFem*, aka professora en la *OICat*, aka correctora en la *OIE*, aka dinamitzadora en la *OMCaF*) utilitzarà tot el seu Enginy per evitar ser presidenta de la dele.

I és així com, el dia abans de que els *aleuers* fessin el seu *big reveal*, la Lucía s'apropava al Ventura i li oferia 50€ a canvi de que posés un problema xunguíssim a la pissarra com a deures. “La mà dreta em diu que això està malament, però la mà esquerra, que és més propera al cor, és ben catalana i no pot dir que no”, deia el professor. Després d'un debat entre les dues mans i el paio del fons (al zero no li van deixar participar, perquè com tothom sap és tonto), el Ventura acceptava la proposta i començava la classe amb el següent problema a la pissarra:

Podeu donar una topologia \mathcal{T} sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (les parts de \mathbb{Q}) de manera que els oberts de \mathcal{T} siguin tots topologies sobre \mathbb{Q} (excloent el conjunt buit) i on \mathcal{T} sigui un conjunt infinit no numerable?

I així és com la Lucía va aconseguir trancar el pla dels aleuers, doncs havien dedicat tant temps a la campanya que no tenien ni puta idea de topologia² i es van haver de passar tota la nit estudiant. Si això fos una pel·lícula, la Lucía hauria tingut una de les nits més Tranquiles de la seva vida, gaudint del plaer de torturar els aleuers. En realitat tampoc va poder dormir en tota la nit, doncs al dia següent era la Fase final de la OIMVACS (Olimpiada Informático-Matemática de Vacas Asturianas Catadoras de Sidra) i havia d'acabar els testos.

²No saben ni la definició de la Clausura

66. Càlculs PISA

És ben sabut que en el darrer informe PISA, els resultats de les proves han assenyalat una gran davallada en el nivell de matemàtiques dels estudiants de quinze anys. Catalunya ha perdut el triple de punts respecte dels que ha perdut tota Espanya en coneixement matemàtic³ i la preocupació ha estat tal, que s'ha estès a l'àmbit universitari.

Aquesta preocupació no ha arribat a la FME, doncs com el CFIS va agafant andalusos any rere any, la facultat està en procés d'instaurar les proves PISHA (Primo, Irá Ste Handaluz Aventajao?) a tota Catalunya.

Aquestes proves consten amb una bona sèrie de problemes, com el que teniu a continuació:

Lavín killo: ehtate aliquindoi pa carculá la zumilla shita que no eh ninguna chuminá

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(6n)!}$$

12. Geo hehe

En Barja, a banda de ser Gallec, és un fanàtic de la geometria clàssica. Aquest trimestre ha aconseguit una fita amb el nou model de finançament del CFIS, però, com que està molt ocupat, li ha envaït la tristesa perquè no ha pogut impartir l'assignatura de Geometria Afí i Euclidiana. Encara que Sembli mentida, el Barja mai renuncia a les seves aficions, i en el seu temps lliure li agrada resoldre problemes que li proposen els seus antics alumnes. Estàs ...Preparat per això?

Sigui un trapezi rectangle que admet un cercle interior tangent a tots els seus costats alhora. Siguin A i B els vèrtexs amb angle de 90°, i C i D els 2 restants. Siguin A', B', C' i D' els punts de tangència del cercle amb els costats AB, BC, CD i DA respectivament. Siguin E el punt de tall entre A'C' i B'D'. Proveu que A, C i E estan alineats.

792. Infinitamente cerca, pero infinitamente largo

Cuaderno de bitácora, a día 7 de diciembre de 2023. Esta mañana me disponía yo, feliz estudiante de la FME, y amante del análisis, a asistir a mi clase diaria de Cálculo Integral. Encinas lucía su vestimenta habitual, y la clase empezaba a despegar al ritmo esperado. Ya han pasado varios días desde que decidí dar rienda suelta a mis irrefrenables sentimientos causados por esta clase mediante este diario.

Al poco de empezar la clase Encinas parecía hacer un amago de lo que parecía una demostración. En ese preciso instante, la clase ha enmudecido mientras mirábamos atónitos a lo que creíamos que estaba a punto de suceder en esa misma clase. Pero el nerviosismo se transformaba en resignación cuando, al escuchar un tímido “dejaré esta demostración para los lectores más atrevidos (tiene un rombitito)”, reparamos en que finalmente la demostración no se haría en clase. Apesadumbrados volvimos a nuestro estado natural después tal momento de incertidumbre y desasosiego. Pero, como dijo probablemente algún famoso “nunca hay que perder la esperanza”, y es que cuando Encinas se disponía a encarar la recta final de lo que parecía una de sus masterclasses, de momento una palabra irradiaba esperanza entre los oyentes: “demostración”.

Pero yo esto no me lo trago, es el viejo truco de siempre. Permanezco unos segundos en mi estado de negación, mientras en los demás oyentes se percibe un atisbo de esperanza, un conato de duda sobre si sería este el día en el que Encinas lo hiciese. Y, en ese preciso instante, la luz⁴. Poco a poco el esbozo de la prueba se va haciendo vigente. Casi puedo rozar con la punta de la pluma⁵ lo que se materializará en la primera demostración del curso. Las slides avanzan y cada vez estamos más convencidos de que esta es

³Mirant-ho pel costat positiu, almenys Espanya no ha fet **un gràfic cuqui i condescendent felicitant-la**

⁴Luz porque es un puto proyector

⁵Soy un puto friki, sí, uso pluma, en mates somos unos putos snobs

la buena. Pero, como en todas las tragedias griegas, el desenlace se hace esperar; y lo que Habría, podría, debería incluso, pasar tal vez nunca llegue a suceder. Parece estar infinitamente cerca, pero al mismo tiempo tenemos la certeza de que el L^AT_EX será infinitamente largo hasta ese preciado QED.

Como pasatiempo mientras la demostración se materializaba, un problema se me vino a la mente, sin la demostración del cual no podría concentrarme en la de integral.

Direm que una familia de funciones \mathcal{F} es *infinitament xapa* sobre una altra \mathcal{S} si $\forall \varepsilon > 0, f \in \mathcal{S} \exists (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} : \forall i |f - f_i| < \varepsilon, \lim_{i \rightarrow \infty} l(f_i) = \infty$, on $l(f)$ és refereix a la longitud de f .

Hi ha una família numerable *infinitament xapa* sobre les funcions contínues d'un interval tancat als reals?