

XXIX Marató de Problemes

27 de febrer de 2025 - 16:00

BLOC II: Més fàcil que calcular amb l'àbac

780. El pare de l'àlgebra

Diu la llegenda, que si no saps resoldre aquest problema el Barja et canvia la nota d'àlgebra lineal a e-secretaria i te la fa repetir. Demostra que si A i B són dues matrius quadrades complexes que commuten, aleshores tenen com a mínim un vep comú.

900. La solució del Blas

Després de la pressió de múltiples estudiants per saber la seva destinació de TFG, el Blas ha decidit amagar les assignacions a un lloc secret de Barcelona, on va a mirar les constel·lacions. Per decidir on, primer camina fins al seu lloc preferit. Aleshores camina des d'allà fins al seu despatx del Campus Nord en línia recta, quan arriba gira a la dreta i segueix caminant la mateixa distància, i marca l'arribada amb una X . Aleshores torna al seu lloc preferit, camina fins al seu despatx de la FME, gira a l'esquerra i torna a caminar la mateixa distància. Quan arriba, camina en direcció a la marca X però s'atura a mig camí, i allà mateix enterra totes les assignacions d'aquest any. El Blas creu que ell és l'única persona que pot trobar aquest lloc perquè ningú més coneix el seu lloc preferit. No obstant això, estudiants ansiosos que volen saber on seran al setembre s'organitzen per trobar on té tota la informació amagada. Creus que ho aconseguiran?

901. Virus matemático

L'Àlex Serrano es passa tantes hores davant de l'ordinador programant que al final li ha passat un virus. Per sort, es tracta del *Virus matemático*, així que se li acut definir les següents successions. Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió d'enters. Definim les successions $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manera recursiva:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= a_0, & \alpha_n &= a_{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\ \beta_0 &= 0, & \beta_1 &= 1, & \beta_n &= a_{n-1}\beta_{n-1} + \beta_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Per curar-se només ha de demostrar si per tot $n \in \mathbb{N}$, α_n i β_n són coprimers, o bé trobar un contraexemple. Noteu que com que ha desenvolupat una por cap als ordinadors, ara no els utilitzarà per programar cap simulació i qualsevol contraexemple l'haurà de trobar a mà, com a molt amb l'ajuda d'un astrolabi. Com que és mandrós, ha de ser amb números petits o bé una construcció ben definida. Podries explicar com s'ho ha de fer?

965. Furbito

FME FEM A juga contra FME FEM B. Al principi del partit, la pilota es planta just al mig del camp. Quan comença la segona part, la pilota es torna a plantar al mig del camp. Pots argumentar que des de la visió humana, que ocorre al cervell, podem veure que almenys un punt de la superfície de la pilota es troba en el mateix punt.

1048. És un duel

Ja és tradició començar el curs de Galois amb la història de la mort del seu protagonista. A la marató, replem al professor i degà Jordi Guàrdia a trobar explícitament les arrels d'un polinomi de grau cinc, però s'excusa perquè ha d'organitzar la propera olimpíada femenina.

$$p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$$

Ja fa uns anys que algú va resoldre la cúbica, i fa encara menys que un altre afirma que no es pot resoldre la de grau cinc. Qui lluitarà contra Galois?

1380. El menys tryhard

El Gabri s'ha passat tres hores intentant-ho al lavabo, i quan surt exclama: "No m'ha sortit, em rendeix!". Diu que es va trobar aquesta integral a un llibre del "segon Ptolomeu", que intentava aproximar π usant trigonometria:¹

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x) + \cos^{2024}(x)} dx.$$

Creus que l'aconseguiràs resoldre abans que ho preguntis a la pròxima mentoria?

¹Tothom sap que és mentida i que està tryhardejant 'en secret' per l'UPC Integration Bee