

XXIX Marató de Problemes

27 de febrer de 2025 - 17:00

BLOC III: Aquests són uns clàssics, els hauries de conèixer

1445. FME un mus?

El Leo, la Júlia, el Joan i la Ruth estan asseguts a una taula rodona jugant al mus ¹, on juguen team Càritas ² contra team trader ³. El Joan i la Júlia es troben alineats amb el centre de la taula. Per ser justos, col·loquen la pila de fitxes el més a prop possible de cadascú, de manera que les dues parelles estan alineades amb les fitxes. Com és d'esperar, abans de mirar les cartes, la Ruth crida: 'ÓRDAGO!!!'. Mentre els altres tres riuen, entra la Paula i li diu 'órdago jo també! Tia som les millors hahaha'. L'Alex Serrano es queda flipant, una no ha mirat les cartes i l'altra no té ni cartes. Així i tot, resulta que tenen la millor mà. Això és fruit d'una *Summa di arithmetica, geometrica, proportione, et proportionalita* perfecta que els dona sempre les millors cartes. La Paula es troba alineada amb la Ruth i la Júlia, i també es troba alineada amb el Joan i el Leo. Camina en línia recta cap a les fitxes per celebrar la victòria, que per algun motiu que ningú sap, sempre és seva. Demostra que si segueix en aquesta trajectòria, la Paula travessarà la línia que uneix al Joan i la Júlia perpendicularment.

1452. Estic al graf?

El graf de la FME es va fent cada cop més gran, sobretot després d'*El Sant Sopar*, i fer càlculs entre arestes es complica. Per sort comptem amb un equip d'enginyers de dades molt motivat que es disposa fer un anàlisi a profunditat. Actualment el graf té n vèrtexs, i es busca $p_{i,j,k}$ el nombre de camins entre les persones i, j de longitud k . És cert que existeixen enters $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tals que

$$p_{i,j,n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot p_{i,j,k}$$

per a tot parell de persones i, j ?⁴

1571. No puc, tinc físio

De tant en tant el Miquel explica que no pot venir perquè té físio. Quan serà el proper dia que faltarà? És un *Cosmographicum Mysterium*. A priori pot semblar que no es pugui predir quan vindrà a mentoria, però l'equip de la marató ens hem adonat del seu patró. Si a la darrera mentoria va venir, aleshores té una probabilitat p de venir a la següent. Si, per contra, no va venir perquè tenia físio, té una probabilitat q de venir a la següent. Sabent que va venir a la primera mentoria ⁵, quina és la probabilitat que vingui a la n -èssima mentoria?

¹Un joc per parelles on els membres de cada parella no poden seure un al costat de l'altre. Si a més els quatre que jugues son matfis, com és el cas, també alteren les proporcions de cartes

²Leo i Júlia

³Joan i Ruth

⁴Per conveniència, preneu $p_{i,j,0} = \delta_{ij}$.

⁵És clar, el mentor convida a la bolera.

1646. Els germans Pagès

Quina és la probabilitat que dos germans acabin estudiant la mateixa carrera al mateix centre? Al cap i a la fi, han crescut junts. Als germans Pagès els ha passat com a les successions *Bernat* i *Eloi*, totes dues diferents a l'inici però amb una mateixa tendència. Aquestes seqüències inicialment llüen així:

$$Eloi_0 = 0, \quad Eloi_1 = 1, \quad Bernat_0 = 1, \quad Bernat_1 = 1$$

I al llarg del temps, evolucionen igual que la successió $(n_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$x_n = 2x_{n-1} + (2n - 3)^2 x_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Alguns creuen que les condicions inicials no afecten tant i que a la llarga el treball constant és tot el que importa. Creus que és cert per al cas de les successions *Bernat* i *Eloi*? Estudia el comportament asimptòtic de la ràtio entre les successions i treu les teves pròpies conclusions. T'avisem que no ets el primer, algú ja ha patentat la fórmula.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Eloi_n}{Bernat_n}$$

1706. Diversitat neurocognitiva

Un dels estudiants més atents i curiosos de la facultat, observant les característiques de treball del seu mentor, li va preguntar:

*El CFIS canvia la teva manera de processar la informació o
ja tenies aquesta característica abans?*

Interessat en explorar més sobre la diversitat neurocognitiva, decideix realitzar una enquesta entre estudiants de la facultat. Com que el nostre estimat reskoldo no ha estudiat estadística, no es troba capacitat per analitzar les dades adequadament, així que l'equip de la marató hem fet una enquesta per ajudar-lo en la seva recerca. La pregunta en qüestió és:

Et consideres neurodivergent? (a) SÍ (b) NO (c) NO HO SÉ

El nostre estimat reskoldo té interès per conèixer la proporció de persones neurodivergents a la facultat, així que deixem anar el *Discurs de la felicitat* a $p - 1$ estudiants, on p és un nombre primer. Sigui K el nombre de possibles discursos que conclourien que hi ha tantes persones neurodivergents com neurotípiques, on l'ordre de les respostes importa. Podríeu dir al nostre estimat reskoldo quant val $K \pmod{p}$?

1707. Doritos

El Francesc Planas és un amant de la geometria i les figures perfectes. Segurament, el seu teorema preferit és el que relaciona el nombre de vèrtexs, vores i cares de qualsevol figura geomètrica. En una classe de geometria afí, explica als seus alumnes l'enginyós disseny dels Doritos. El que no va acabar d'explicar és que té un cert toc que només li permet menjar triangles acutangles. Creus que s'ho podria fer per menjar un dorito defectuós amb un angle recte?