

XXIX Marató de Problemes

28 de febrer de 2025 - 12:00

BLOC IV: Els que creen tendència

1776. Problema estructural

Si Arreplegats li fa un castell en honor al Barja, no espereu que hi siguin la Joana i l'Aleix, que no s'atreveixen a fer castells i es conformen amb fer estructures. ¹ La seva tècnica per fer estructures és la següent. Comencen definint dos polinomis i una relació de recurrència, com per exemple la següent:

$$R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x + 1, \quad R_n(x) = xR_{n-1}(x) - R_{n-2}(x)$$

Aleshores juguen a dir propietats i l'altre les ha de demostrar. La Joana ha estudiat molt els nombres primers n tals que $2n + 1$ també és primer. L'Aleix diu que donat un nombre primer q de la forma $4n + 1$ o bé $4n + 3$, aleshores $R_n(x)$ descompon completament al cos $\mathbb{F}_q$. ² La Joana l'ha escoltat atentament, però no amb la intenció de resoldre'l, ho podries fer tu?

1777. Moltes butis

El dia de la pi-buti la Paula es va inventar un joc. Ja havien explorat l'heptadecàgon, ara volen jugar amb figures circulars. Una persona es mou al voltant d'una circumferència i cada cop que recorre una unitat de distància, deixa caure un tros de buti. Sigui a_n el nombre d'arcs de diferent longitud després d'haver tirat n butis. Calcula $\limsup a_n$ i $\liminf a_n$ si el perímetre de la circumferència és irracional.

1781. Topologia de l'ordre

Què va venir primer, la mà dreta o la mà esquerra? I és que cap de les dues pot existir sense l'altre. La mà dreta dibuixa una topologia de l'ordre, la mà esquerra la defineix i els alumnes ja no saben ni el que significa. El que tothom sap és que si $(\text{mà dreta})(\text{mà esquerra}) < 0$, aleshores existeix una mà mig = 0. Nosaltres ho posarem fàcil i parlarem només de nombres reals. Sigui n un nombre natural. Per cada racional expressat en forma irreductible com $\frac{a}{b}$ on $b \geq n$ considerem la bola centrada en $\frac{a}{b}$ de radi $\frac{1}{b^2}$. Sigui B_n la unió de totes aquestes boles. Calculeu

$$\bigcap_{n \geq 1} B_n.$$

¹Els castells es consideren a partir de sis pisos, menys és una estructura.

²És a dir, als enters mòdul q , aquest polinomi es pot expressar com a producte de monomis de la forma $(x - \alpha)$.

1789. Parlem de diners

Entre corol·lari, teatre, club de ganxet, la marató de problemes i altres la dele s'està quedant sense diners. A partir d'un punt, la quantitat de diners de qualssevol dos moments en el futur està acotada per ϵ , i això no pot ser. El degà els ha comunicat que, com a extra, cada mes rebran un valor de diners en funció del nombre de persones que assisteixen a les festes j , i el nombre de gent que va a les sortides k .

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n}$$

Quin és l'extra de pressupost que tindrà la dele?

1811. El de trading

No es pot fer una marató sense un problema dedicat a aquest sector d'estudiants, com el Bernat, que vol ser trader. És per això que ha començat a entrenar les seves capacitats d'estimar valors en el mercat. Comença creant una criptomoneda anomenada *\$Libra*, que més endavant serà promocionada pel president León. Aquesta moneda al moment zero té valor 1, i cada dia que passa pren un valor aleatori uniforme entre 1 i 2025. El Bernat, creient que el valor d'un actiu extremadament volàtil és predictable, dissenya la següent estratègia:

1. Estima el seu valor com a 1 a dia 0, ja que així ho ha programat.
2. A dia n , si el valor de la moneda és el que ell havia predit, manté la predicció. Si és menor, la seva predicció x s'actualitza a $x - 1$. Altrament, s'actualitza a $x + 1$.

De fet, està tan convençut del seu mètode que fa *all in* i es juga la seva vida en un duel. Podeu estimar quina serà la seva predicció al cap de 2025 dies del valor de *\$Libra*?

1815. Feu com la Bet

És ben sabut que la Bet trepitja poc la uni, menys sabut que encara està fent la carrera. Les males llengües diuen que es queda fins tard mirant Got Talent, altres diuen que mira sèries, altres que està llegint el Torà... Quan el Juanjo li pregunta com és que no ve a la uni, la seva simple i impressionant resposta és que, els 30 minuts que triga a anar a la uni en bus, prefereix invertir-los en resoldre problemes com el següent:

Caracteritza totes les funcions $f, g, a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que:

$$f(x) + g(y) = a(x)b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

La Bet és una persona molt interessada en la solidesa del càlcul, així que vol una solució rigorosa. I tu, quant trigues a resoldre'l?