

XXIX Marató de Problemes

3 de març de 2025 - 12:00

BLOC VI: Problemes actuals

1862. Jerarquia al teatre

No és cap secret que al teatre de la FME hi ha diferents rols de poder estrictament ordenats. És a dir, per cada parella de persones, una té els mateixos poders que l'altre i potencialment més. Sigui X el conjunt de persones que estan al club de teatre (no assumiu cap *teorema de finitud*, el seu cardinal pot ser infinit). S'estableix un conjunt $\mathbb{P}$ de rols de poder, on cada rol consisteix en un subconjunt de persones de X sota els quals tens poder, sota la restricció que els poders estan estrictament ordenats. És possible que el cardinal de $\mathbb{P}$ sigui el mateix que el de $\mathcal{P}(X)$?

1867. Jane Street puzzle

Ara que el CFIS compta amb molts alumni traders, hem tingut accés al puzzle de Jane Street del mes vinent. Podries ser el primer en resoldre'l? Consisteix a caracteritzar els polinomis en n variables sobre $\mathbb{R}$ tals que:

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = P(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}) \text{ si } \sum \alpha_i = 0$$

Ânims! Que no cal tenir dos premis Nobel en dues disciplines diferents per resoldre'l.

1878. El Hacker de la maratón

Com és tradició, les puntuacions de les darreres tres llistes no es faran públiques fins l'acte de clausura per donar més emoció. Això ha desagradat fortament als Autistralia Titos, qui viuen ansiosos per conèixer els guanyadors (i impugnar la maratón si no són ells). És per això que els organitzadors hem ideat un sistema de xifrat per comunicar-nos sense que ells ens puguin entendre, que patentarem com a 'RSA' (Rodríguez, Sesmilo, Alberich). En aquest sistema, primer triem dos nombres primers p i q molt grans i els multipliquem, $n = pq$. Aleshores triem un exponent per descriptar $a < \frac{1}{4}n^{1/4}$ i un exponent d'enciptació b , que compleix $ab = 1 \pmod{\phi(n)}$. A continuació, publiquem n i b . Si algú ens vol enviar un missatge m , el converteix a un enter $x \in \mathbb{Z}_n$ i ens envia x^b , i nosaltres podrem calcular el missatge inicial calculant $(x^b)^a = x$. En un cert moment, els correctors envien un missatge amb totes les puntuacions, i els Autistralia Titos dissenyen una estratègia per calcular a i poder descobrir els guanyadors, que anomenen 109Mt. Comencen aplicant l'algoritme d'Euclides amb els únics dos nombres disponibles que tenen, n i b . L'algoritme es descriu a continuació:

1. Definim $a_1 = b$ i $b_1 = n$.
2. Dividim a_n entre b_n i obtenim un quocient q_n i un residu r_n .

3. Si el residu $r_n = 0$ termina l'algoritme. Altrament, definim $a_{n+1} = b_n$ i $b_{n+1} = r_n$ i tornem al segon pas.

Aleshores defineixen la següent recurrència, inspirada pel *Virus Matemático*:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+1} = q_n x_n + x_{n-1}$$

Finalment, afirmen que trobaran l'exponent secret a en algun dels termes de la recurrència. Creus que aconseguiran conèixer la seva puntuació abans que ningú? ¹

1882. Final de discreta

Com ve sent tradició en els exàmens de discreta, hi ha un problema que només pots treure fent servir el principi d'inclusió-exclusió i t'acaba quedant una expressió lletja com la següent:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k+2)^l$$

Sabent que $0 \leq l \leq n$, intenta simplificar l'expressió tant com puguis, si us plau, no deixem les respostes així. Cada cop que deixes una expressió sense desenvolupar mor la gateta de Mates Mike.

1887. La tiza de matar

Ha despertat el professor més mític de la facultat, preocupat per la dificultat dels problemes de la maratón. El triple R ja ha posat problemes de Putnam a exàmens finals de Càlcul 1, ha fet *chack chack* a les recuperacions a incomputables generacions i ha col·laborat en anteriors maratons. Aquest any ha decidit posar un problema *facilito* perquè el puguin resoldre també els de primer, els *alumnes que coneixien l'infinit*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)! \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right)$$

1906. Els més fidels

Coneixeu al Miguel-Àngel i al Lluís? Són els aficionats més purs. Igual que els pericos, van al camp a animar un equip que sempre perd.² Què és un equip sense la seva fidel afició? No són res, un grup de persones *consistentes però no complets*. Com que el futbol és un esport per passar-s'ho bé, els organitzadors han ideat un nou sistema de puntuació. En una lliga de n equips, cada equip acaba amb un nombre associat múltiple de 11...11, un nombre d' n xifres. Aleshores, la puntuació de cada equip es calcula com la suma de les xifres del seu número associat. Com ho ha de fer l'FME C per garantir que tornarà a ser l'últim?

¹Ho sabran abans que ningú si: 1) El seu algoritme és sempre correcte, 2) El seu algoritme és prou ràpid i acabarà abans que fem l'acte de clausura.

²Per qui no segueixi les lligues, estem parlant de l'FME C.