

# XXIX Marató de Problemes

4 de març de 2025 - 12:00

## BLOC VII: Això ja s'acaba

### 1906. La Real integral

Guillem, no satisfet amb haver fet el canvi més èpic del CFIS (info-biomed a mates-dades), encara guarda ressentiment cap a l'Àlex per haver-li guanyat en la final de l'Integration Bee. 'No eren integrals de veritat!' - remuga cada nit abans d'anar-se'n a dormir.

Per demostrar la seva superioritat, un dilluns va tancar a l'Àlex en una saleta CFIS i li va reptar a resoldre la següent integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\sin(x))}{x} e^{\cos(x)} dx$$

Després d'emplenar 20 fulls de paper (més ràpid que instal·lar un compilador), quan la suor començava a menjar-se el paper amb què escrivia, Àlex es va aixecar victoriós: 'Per fi, he trobat una solució amb variable complexa!'.

Aleshores va entrar l'Abel amb ulleres de sol, aterrant la seva àguila que havia comprat en Amèrica (hell yeah!) - 'Esta integral es trivial por métodos complejos, pero solo un Real integrador como yo la puede hacer sin ningún contorno complejo'. Dit això, va tornar a pujar a la seva àguila, volant cap al cel, mentre la sala CFIS explotava en epicitat americana.

Saps quina solució va trobar el suorós Àlex (1 punt)? I quina solució havia trobat l'èpic Abel (aka 'Integrales Locas') (6 punts)?

### 1913. Futsal Matesfindulecos

Després de 6 llistes redactades exclusivament per la llegenda de l'Àlex Rodríguez, matemàtic amb nombre d'Erdős 4, era moment que Leo redactés algun problema. Però quin? Era la gran pregunta. Tenia una idea, però no sabia ben bé si seria interessant i tindria un nivell apropiat. Malauradament, els èpics gols i els tremendos derrapes del Rubén en el partit de futsal que estava veient no l'ajudaven a concentrar-se. Podeu donar-li un cop de mà per tancar per fi la llista 7? - 'Per quins valors  $\ell \in \mathbb{R}^+$  es poden col·locar tots els rectangles  $\frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$  ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ) dins d'un quadrat  $\ell \times \ell$  sense solapaments?'

### 1918. Paseillo a Francia

Finalment ha arribat el dia. Els membres del 'Club de paseillos extremos' es posen les motxilles i marxen cap al seu gran objectiu. Per fer honor al seu nom, no faran 30 km o 60 km, sinó 150 km fins a França. És clar, sense descans, i sota el perill que apareguin *Figures Ocultes*. Per a sorpresa de tots, en arribar al quilòmetre 70 ja va ser difícil mantenir el cos en moviment,

ignorant la son i el dolor en tots els músculs. Per això, per distreure's el Carlos va idear un joc que els permetria jugar una bona estona. El Carlos havia pensat en una funció  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  que assegura que és no constant i periòdica de període un nombre primer  $p < 200$ . Li repta al Luis a determinar el període de la següent manera: el Luis dirà una llista de  $n$  enters  $x_1, \dots, x_n$  i el Carlos respondrà amb la llista d'imatges  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  corresponents. Això, només una vegada. I amb aquesta informació, el Luis ha d'endevinar el període. El Luis, que té un mal de cap terrible, només vol silenci. Podeu ajudar-lo a trobar el mínim  $n$  tal que pugui assegurar que guanyarà i gaudir del seu apreciat silenci el més aviat possible?

## 1975. Joc de pedres

Aquesta maratón hem patit l'absència de chorizo portuano<sup>1</sup>. Ells diuen que han estat ocupats participant en un concurs de programació competitiva, però una mentida tan boba no se la creu algú amb 230 punts de IQ. El vertader motiu és que s'han passat el cap de setmana jugant al següent joc:

Sigui  $n \geq 1$  un enter positiu senar. El Bernat i el Manu s'alternen torns, començant pel Bernat. Juguen en un tauler amb  $n$  espais, arranats en una línia. A cada torn, un jugador pot fer una de dues accions:

- Posar una pedra en un espai buit
- Eliminar una pedra de l'espai  $s$ , posar una pedra en l'espai buit més proper per l'esquerra a  $s$  (si existeix) i posar una pedra en l'espai buit més proper per la dreta a  $s$  (si existeix)

Una acció només està permesa si ens fa arribar a una configuració que no ha passat abans en el joc. La configuració inicial és un tauler buit (per tant, mai més es pot tornar a una configuració amb tot buit). El primer jugador que no pugui moure perd. Assumint que el Bernat i el Manu són infinitament intel·ligents<sup>2</sup> i juguen de forma racional, quines jugades podria fer Bernat en el seu primer torn?

## 1977. Festes 2003, les millors festes!

Per celebrar el *Dia Internacional de la Dona Matemàtica*, Festes 2003 decideix organitzar una festa. Arriben  $n$  persones, i a cada una li atribuïm un nombre en ordre d'arribada. Diem que la festa ha sigut 'tot un èxit' si existeixen persones  $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$  tals que  $a_1, a_2$  s'han donat la mà, i  $b_1, b_2$  també. En canvi, diem que la festa ha sigut 'tot un fracàs' si existeixen persones  $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$  tals que  $a_1, a_2$  s'han donat la mà, i  $b_1, b_2$  també. Si la festa compleix les dues condicions o cap, farem una excepció i direm que ha sigut una 'festa avorrida'. Si la probabilitat que dues persones qualssevol es saludin és  $1/2$ , què és més probable, que la festa sigui tot un èxit, o tot un fracàs? (Nota: s'espera una resposta raonada i en funció de  $n$ )

<sup>1</sup>I també de Fémimas, Maricones y Omar; tot i que hagin participat femelles, homosexuals i Omars.

<sup>2</sup>Que és assumir molt

## ?. Carta de comiat

Estimats participants,

Hem arribat al darrer problema de la marató. Qui ho hagués dit? Després de tantes hores de preparació, solucionant problemes a últim moment, clarificant enunciats i rectificant quan cal. Apuntant equips al darrer moment, intentant convèncer al Xavier Ros-Oton i al Joaquim Serra a que participin (no han pogut, estan ocupats treballant amb un medalla fields de l'ETH). Repassem els moments més clau:

1. L'FME dona suport a la Marató per primer cop i penjem el logo a la web.
2. L'FME no disposa d'aules dimecres i hem de posposar el primer dia a dijous ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).
3. Per primer cop, fem un mini-espectacle amb disfresses i música i en conseqüència publiquem la primera llista 20 minuts tard ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).
4. Portem molt més menjar que qualsevol any anterior, molts participants ajuden a portar-lo i uns pocs també van ajudar a recollir l'aula. En compensació, decidim atorgar uns punts extra per la seva feina durant uns 20 minuts ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).
5. Notem algunes ambigüitats en enunciats que intentem aclarir amablement i amb precisió de manera que tothom ho entengui perfectament ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).
6. Decidim donar punts extra per donar una formula més tancada a un problema i informar als participants ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).
7. Triguem més de 12h a actualitzar la web amb els punts extra ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).
8. Introduïm un dia de descans, diumenge, perquè  $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  té un concurs dissabte i necessiten més temps ( $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  es queixa).

Volem agrair a totes les polis de la marató la seva participació, els emblemes que heu dissenyat i esperem que us ho hàgiu passat molt bé i hàgiu gaudit molt. També volem agrair a  $T\omega\sigma\ M\epsilon\eta\ O\Gamma\zeta H\epsilon\varsigma\tau\Gamma\alpha$  per no queixar-se quan vam posar el logo de la facultat a la web.

Volem felicitar als gossos d'esquadra per liderar la classificació tant de temps tot i que tinguin més punts bonus que per fer mates. A Kleeminters per ser l'equip de primer més motivat i per donar material de redacció de problemes. A Mesozoico per enviar els problemes a les 12:00, tot i que sigui en horari americà. A Autistralia Titos per ser els més sociables i resoldre els problemes de la llista 1 i 2 en qualsevol taula menys la seva. A Perrito completo els volem agrair l'ajuda a l'hora de recollir el primer dia (bueno això diuen ells). A Esparto li hem d'agraciar la seva participació i constància, un dels equips amb més problemes resolts per membre de tota la competició.

Notem que molts participants ens han preguntat per 'frases estranyes i confuses' que han anat trobant en els enunciats, i ningú ha descobert encara què signifiquen. No us ajudarem, ho heu de descobrir vosaltres sols. Us toca descobrir quin sentit té la numeració dels problemes i explicar breument la referència que apareix a cada problema respecte a la numeració, i com hauríem de numerar aquest problema. Bona feina i molta sort!

Salut,

L'equip organitzador de la Marató.