

XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 26 d'abril de 2020

Bloc I - Aquests els fèiem a parvulari

1. Però la Terra no era plana?

En Jaume Amorós és un apassionat de les loxodromes i ha decidit emprendre un viatge apassionant pel món en busca de les millors corbes parametritzades per l'arc. En Jaume surt d'un punt de la Terra i viatja 1 km cap al sud, on es troba un ós. En Jaume, espantat, es desplaça 1 km a l'est fins que el perd de vista. Finalment, en Jaume recorre 1 km cap al nord i arriba al punt inicial. Podríeu demostrar (amb cert rigor matemàtic) de quin color és l'ós?

Solució. Si ens fixem només en el seu recorregut, hi ha diversos llocs on es podria trobar en Jaume (la justificació rigurosa es troba al final). O bé es troba al pol nord, o a una distància d'1 kilòmetre cap al nord del paral·lel de longitud d (en km) més pròxim al pol sud, per qualsevol valor de d tal que $d^{-1} \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, que existeixen ja que el radi de la terra és de 6371 km. Ara bé, a les proximitats del pol sud no hi ha ossos, així que a menys que en Jaume hagi confós un pingüí amb un ós, aquest està de vacances al pol nord.

Donat que el Jaume es troba al pol nord, l'ós segurament és blanc, llevat de mutació, pintura externa o producte per invertibles.

Justificació. És clar que el pol nord satisfà la propietat del recorregut. Considerem doncs un punt diferent de la superfície terrestre per sobre del paral·lel de longitud 1 km del pol sud. Aquest punt es troba en un únic meridià, i moure'ns 1 km cap al sud ens porta a un punt del mateix. A més, la única manera d'arribar al punt després de recórrer 1 km cap al nord és començar en el mateix meridià. Així doncs, el recorregut cap a l'est (al llarg d'un paral·lel) ha de tenir el principi i el final al mateix meridià, cosa que només pot passar si el paral·lel té longitud 1 km o qualsevol fracció $\frac{1}{n}$ (llavors es donarien n voltes fins arribar al mateix punt), ja que un paral·lel i un meridià només tenen un punt d'intersecció. Per últim, si el punt inicial es troba en qualsevol punt per sota del paral·lel de 1 km, no és possible anar 1 km cap al sud, i si ens trobem sobre aquest paral·lel tenim problemes amb la definició de est quan arribem al pol sud (en qualsevol cas al pol sud no hi ha óssos).