XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 26 d'abril de 2020

Bloc I - Aquests els fèiem a parvulari

13. I les hipòtesis?
En Carles Padró va veure que la seva vida era molt monòtona i va decidir comprar-se uns pantalons liles i unes vambes amb un estampat de palmeres. Ara necessita ajuda per demostrar que tota successió de nombres reals conté una parcial monòtona. El podeu ajudar?

Solució. Assumirem que monòtona no es refereix a estrictament monòtona ja que aleshores l'enunciat resulta fals si considerem una successió constant. Sigui (a_n) la successió de nombres reals. Direm que un element a_k és lila, com els pantalons del Padró, si existeixen un nombre finit de termes a_l a la successió tals que $a_k < a_l$ i $k < l$ (a partir d'aquest element només hi ha un nombre finit de termes més grans que ell). Ara demostrarem de forma constructiva l'existència d'una parcial monòtona segons si el nombre d'elements liles és finit o infinit.

- **Hi ha un nombre finit d'elements liles**

  Com que el nombre de termes liles és finit, si anomenem N a la quantitat d'elements liles, existeix un n_0 tal que a_{n_0} és no lila i es troba entre els primers $N + 1$ termes de la successió (a_n). Ara construirem una parcial creixent de termes no liles inductivament. Siguin $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ els primers termes de la nostra parcial monòtona. Veiem que podem afegir sempre un nou terme: Com que a_{n_k} és no lila, hi ha un nombre infinit de termes a_l a (a_n) tals que $a_{n_k} < a_l$ i $n_k < l$. I com que hi ha un nombre finit de liles, existeix un terme no lila $a_{n_{k+1}}$ tal que $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ i $n_k < n_{k+1}$. Per tant, podem construir una parcial (a_{n_k}) infinitament llarga de termes no liles monòtona creixent.

- **Hi ha un nombre infinit d'elements liles**

  En aquest cas construirem una parcial monòtona decreixent d'elements liles.

  Agafem un lila qualsevol a_{n_0} que serà el primer terme de la nostra parcial decreixent de liles. Vegem que donats $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ termes liles de la nostra parcial decreixent, sempre podem afegir un element més. Com que a_{n_k} és lila, només hi ha una quantitat finita de termes a_l de (a_n) tals que $a_{n_k} < a_l$ i $n_k < l$. Però com hi ha infinits liles (i per tant, infinits liles que van després de a_{n_k}), existeix un lila $a_{n_{k+1}}$ tal que $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$ i $n_k < n_{k+1}$. Per tant, podem construir una parcial (a_{n_k}) infinitament llarga de termes liles monòtona decreixent.