Marató de problemes: Problema 28

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

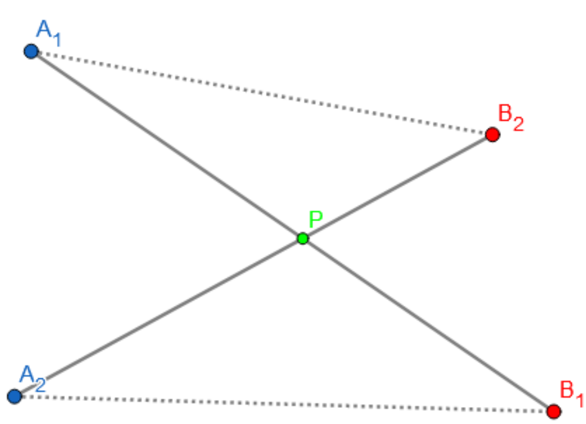
Definition 0.1 (Aparellament)**.** Donat un conjunt de n punts blaus i n punts vermells a $\mathbb{R}^2$, definim un *aparellament* d'aquests punts com un conjunt de n segments tal que cada segment va d'un punt blau a un punt vermell i cada punt és l'extrem d'un únic segment. Observem que hi ha un nombre finit d'aparellaments (concretament, $n!$).

Definition 0.2 (Cost d'un aparellament)**.** Definim el *cost d'un aparellament* com la suma de la longitud dels segments que el formen.

Donat que hi ha un nombre finit d'aparellaments, n'existeix un amb cost mínim. A continuació veurem que aquest aparellament satisfà la restricció del problema:

Lemma 0.1. *En un aparellament amb cost mínim, no hi ha dos segments que es creuin.*

Demostració. Ho argumentarem per contradicció. Sigui E un aparellament amb cost mínim tal que conté dos segments A_1B_1 i A_2B_2 que es creuen. Siguin A_1 i A_2 punts blaus i B_1 i B_2 punts vermells. Donat que no hi ha tres punts alineats, aquests segments es creuen en un únic punt, que anomenem P. Aleshores,



considerem l'aparellament E', que manté tota la resta de segments iguals i canvia els segments A_1B_1 i A_2B_2 per A_1B_2 i A_2B_1. Per la desigualtat triangular,

$$d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2) = d(A_1, P) + d(P, B_1) + d(A_2, P) + d(P, B_2) > d(A_1, B_2) + d(B_1, A_2)$$

on la desigualtat és estricta perquè A_1, P i B_2 no estan alineats, ja que P està en la recta A_1B_1 i sabem que A_1, B_1 i B_2 no estan alineats.

Per tant, hem trobat un aparellament E' amb cost menor, contradient la nostra hipòtesi. $\square$