

## 5 Problema 58

a),b) Definimos  $f$  a trozos como una función que vale 0 normalmente menos al rededor de una sucesión de puntos separados entre sí una distancia fija. En cada punto de la sucesión ( $a_n = n, n > 0$ ) tenemos que entre ( $a_n - 2^{-2n}$  y  $a_n$ ), la función crece linealmente hasta llegar a  $2^n$  en  $a_n$  y vuelve a descender linealmente hasta llegar al 0 en  $a_n + 2^{-2n}$ . Así pues, el área de los triángulos sería  $\frac{1}{2}2^n 2^{-2n} * 2 = 2^{-n}$ .

Definimos  $F = \int_0^x f dx - 1$ . La función es convergente y tiene límite 0, porque  $\sum 2^{-n} = 1 (n > 1)$ , su derivada es  $f$  y es monótona porque  $f$  es positiva. Así pues cumple todas las condiciones tanto de a) como de b), pero su derivada  $f$  no es ni acotada ni convergente. QED

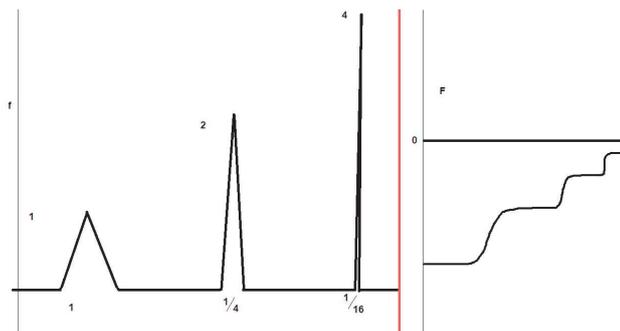


Figure 1: Gráficas de  $f$  y  $F$