Problema 112 (Jordi Pesao)

a)

És cert. Demostrarem que tota forma lineal ϕ de V^* pot escriure's de forma única com $\phi_1 + \phi_2$, on $\phi_1 \in V_1^*, \phi_2 \in V_2^*$. Primer veiem la unicitat: si suposem que $\phi = \phi_1 + \phi_2$ tenim que per tot $v_1 \in V_1$ $\phi(v_1) = \phi_1(v_1) + \phi_2(v_1) = \phi_1(v_1)$ ja que $\phi_2(v_1) = 0$, així que $\phi_1(v_1) = \phi(v_1)$ per tot $v_1 \in V_1$ i semblantment $\phi_2(v_2) = \phi(v_2)$. Això determina únicament els valors de ϕ_i per tot v ja que per pertànyer a V_i^* tenim que per tot $v \in V$, $v = v_1 + v_2, v_i \in V_i$ i $\phi_i(v) = \phi_i(v_1 + v_2) = \phi_i(v_1) + \phi_i(v_2) = \phi_i(v_i)$.

Are veurem que per a ϕ_i definides d'aquesta forma ($\phi_i(v_i) = \phi(v_i)$ per tot $v_i \in V_i$) es satisfà efectivament que $\phi = \phi_1 + \phi_2$. En efecte, per tot $v_1 + v_2 = v \in V$:

$$\phi(v) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = \phi_1(v_1) + \phi_2(v_2) = \phi_1(v) + \phi_2(v) = (\phi_1 + \phi_2)(v)$$

b)

És fals. Considerem V l'espai vectorial de secuències amb termes mòdul 2 tal que el nombre de termes que són iguals a 1 és finit. Podem considerar-ho també com l'espai vectorial dels polinomis sobre el cos $\mathbb{Z}_2$, on el coeficient de x^i correspon al i-èssim terme de la seqüència. Siguin V_i el subespai on tots els termes de la seqüència excepte l'i-èssim són igual a 0 (l'espai dels monomis x^i). Tenim que $V_i = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$, (tot polinomi és suma de una quantitat finita de monomis de forma única), però l'espai V^* és isomorf a l'espai de seqüències en $\mathbb{Z}_2$ (l'isomorfisme f és: el terme i-èssim de la seqüència $f(\phi)$ és $\phi(x^i)$), que és bijectable amb el conjunt $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (cada seqüència correspon al conjunt de nombres naturals dels índexos dels termes que són 1) i per tant no numerable, mentre que $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i^*$ és numerable ja que de fet és isomorf a V (tot element de $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i^*$ es pot expressar com $\sum_{i \in I} \phi_i$ on ϕ_i és la única funció no nul·la de V_i^*, l'isomorfisme és $f(\sum \phi_i) = \sum x^i$) i el conjunt de polinomis sobre un cos numerable és numerable. Per tant no pot haver-hi una bijecció entre els espais, i per tant no poden ser isomorfs.

Un contraexemple alternatiu és considerar V l'espai vectorial dels polinomis reals, i V^* llavors és isomorf a les seqüències de nombres reals, que és un espai de dimensió no numerable, mentre que $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i^*$ té dimensió numerable.