

Marató de problemes: Problema 130

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuuu

L'Oriol Serra està corregint els exàmens finals de discreta. La classe de discreta té n alumnes, dels quals r rebran matrícula d'honor (i automàticament quedaran aprovats). Després, per cada altre alumne, l'Oriol pot decidir entre aprovar-lo o suspendre'l. De quantes maneres ho pot fer?

Una manera de contar-ho és suposant que primer l'Oriol escull els k alumnes aprovats (amb $r \leq k \leq n$) i després dins d'aquests k n'escull r per donar-los-hi la matrícula. Aleshores, el nombre de maneres de fer-ho seria

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r}$$

Però l'Oriol també pot decidir repartir primer les r matrícules, i després per cada altre alumne decidir si el suspèn o no. Aleshores, tindria el següent nombre de possibilitats:

$$\binom{n}{r} 2^{n-r} = \binom{n}{n-r} 2^{n-r}$$

Donat que les dues fórmules representen el nombre de maneres de realitzar la mateixa tria, tenim que

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{n-r} 2^{n-r}$$