Marató de problemes: Problema 226

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

No saps com has arribat fins aquí. El teu dia començava adormint-te i perdent el H6, però quan agafaves el següent hi veies a la Casanelles. No importava que arribessis tard perque la professora també ho feia. Però de sobte estaves just davant de la facultat de Física i Química (ecs!) i l'Amadeu t'amenaçava vestit de cani, perque just aquell dia no s'havia disfressat.

Amenaça 1. *Tu, brètol! Finits punts a $\mathbb{R}^2$. És vertitat que o bé tots estan alineats o almenys una recta en conté dos? Demostra'm-ho o et rajo per un nombr numerable de llocs.*

- Bé, de fet si assumim que els *navajazos* ocupen una superficie fixada, donat que el meu cos és compacte, amb finits *navajazos* ja em podries apunyalar sencer. Però el cas, Amadeu, no et posis nerviós només per suspendre un examen de química. En pots suspendre més al segon quadrimestre - dius mentre guanyes temps per pensar la demostració.

Amenaça 2. *Que m'ho demostris, tros d'ase. I si no es per contradicció et quedes sense móbil.*

- Bé, el que em demanes, assumint que m'has atracat dos cops a la Diagonal i que només has atracat finits cops, és que

Proposició 1. *Tots els atracaments han estat a la Diagonal o hi ha una recta que passa només per dos atracaments.*

Demostració. Si tots han estat a la Diagonal, obviament ja està. Suposem que no. I com aquesta navalla suïssa afilada em suggereix, raonarem per contradicció. Per simplicitat, anomenarem punts als llocs on has atracat i $\mathcal{A}$ al conjunt de punts on has atracat ($|\mathcal{A}| < \infty$) i suposarem que Barcelona és homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. El conjunt de rectes que uniexen dos punts de $\mathcal{A}$ l'anomenem $\mathcal{R}$. Suposem que tota recta de $\mathcal{R}$ conté al menys 3 punts de $\mathcal{A}$ i arribarem a contradicció.

Per ser $\mathcal{A}, \mathcal{R}$ de cardinal finit, sabem que existirà un punt tal que la distància d'aquell punt a qualsevol recta que no el conté és mínima. Sigui S aquell punt i r la recta a la qual la distància és mínima. Sigui $H \in r$ tal que $d(S, H) = d(S, r)$.

De sobte, et quedes en blanc. La por de l'Amadeu fent un recobriment del teu cos a navajazos t'envaiex. Però en lultim moment passa el Marc Herault amb una ecooltra a tota velocitat per la vorera, espantant un colom. Un colom!

Ara, com $r \in \mathcal{R}$, sabem que al menys tres punts de $\mathcal{A}$ en r. Pel principi del colomar, sabem que dos estaran al mateix costat. Sigui R_1 el més proper a H i R_2 el més llunyà. Sigui $s \in \mathcal{R}$ la recta que passa per R_2 i S. És evident que la $d(R_1, s) < d(S, r)$, portant a una contradicció i demostrant que sempre has atracat a la Diagonal o hi ha alguna recta on només has atracat dos cops. $\square$

- Però que dius, abraçafanals! Demostra'm al menys que la distància és més petita. Estic cansat de *exercicis pel lector* i *és evident* - diu amb to amenaçant l'Amadeu però sense ser una amenaça-. Treu el quadradet i demostra.

Bé, el segment que uneix R_1 amb s és paral·lel a l'alçada per H del triangle format per S, H, R_2, i és segur més petit, o igual si $H = R_2$. En qualsevol dels casos, l'alçada és estricament més petita que el segment $|SH| = d(S, r)$ per formar H, S i el peu de l'alçada un triangle rectangle. Per tant, ja ho he demostrat. Puc posar $\square$?

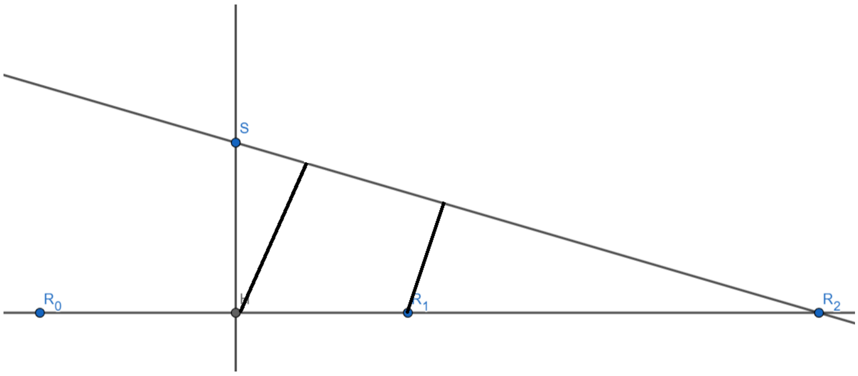

Figura 1: Esquema de l'esquema que tens a la mà

- No encara, vull veure abans un dibuix, pet de llufa!

Resignat, treus un boli de la motxil·la i et fas un dibuix cutre a la mà per tractar de que ho vegi del tot clar. A la Figura 1 se'n pot veure un esquema cutre.

-Bé, capcigrany, ara si pots posar el quadradet dels nassos.

□

Marxes tranquil, penses que ja res et pot molestar, quan de sobte sents que et torna a cridar

Amenaça 3. *Una última cosa, xuc de carbassa! I si el nombre de punts és numerable?*

- Trivial, estimat (bé, no masssa pero segueix tenint una navalla) Amadeu -li dius tranquil·litzat perque ja saps com respondre-. Quan hagis atracat numerables cops sí podras fer que cada recta tinui més de dos punts. Això ho pots fer per exemple si atraques a cada xamfrà de l'Eixample. O tornant a $\mathbb{R}^2$, si consideres $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^2$. Qualsevol recta tindrà un pendent racional i per tant contindrà infinits punts.

Ja tranquil, marxes cap a la classe de la Marta, que tot i que arribaràs tard saps que no importa perque, no cal enganyar-nos, no tindràs ni putissima idea de que es dual del quocient. O era al revés?