XXIV Marató de Problemes

Pelotazos

Abril 2020

Problema 226. 454. Qué primos!

a) Utilitzarem la identitat $(1+a^k+a^{2k}+...+a^{nk})(a^k-1)=a^{(n+1)k}-1$. Que pot ser comprovada fàcilment. Ara si $a=2$, tenim que 2^m-1, si $a*b=m$, es pot descomposar com $(2^a-1)(1+2^a+...+2^{(a)(b-1)}$. Ara si 2^m-1 és primer una de les dues parts de la descomposició ha de ser igual a 1. Per tant $a=1$ o $b=1$. Això implica que com ha de passar per a qualssevol divisors de m aquest ha de ser primer.

b) Aquí utilitzarem la identitat $(1-a^k+a^{2k}-...+a^{2qk})(1+a^k)=1+a^{(2q+1)k}$. Que de nou és fàcilment comprovable. Observem que és important que $2q$ és parell. Ara si $a=2$ i a 2^m+1, m té algun factor imparell més gran que 1 la aplicació és immediata amb aquest factor prenent el lloc de $2q+1$ a la fòrmula anterior. A més tindriem que $(1-2^k+a^{2k}-...+2^{2qk})$ només pot ser 1 si $q=0$ cosa que not pot passar ja que $(2q+1)>2$ i per altra banda $(1+2^k)$ sempre serà >1. Per tant hem vist que si m té algun imparell >1 com a factor, 2^m+1 no pot ser primer. Per tant si 2^m+1 és primer m haurà de ser una potencia de 2 ja que la resta de primers són imparells >1.