Problema 55

Egretta Garzetta

April 27, 2020

Sigui $\alpha \in [0, 2\pi)$ l'angle de la broca de les hores respecte l'eix vertical i $\beta \in [0, 2\pi)$ l'angle de la broca dels minuts respecte l'eix vertical. L'angle β està unívocament determinat per α, ja que representa el pas proporcional de temps entre una hora i la següent. Com que quan α avança 2π, β avança $\frac{2\pi}{12}$, tenim

$$\beta = 12(\alpha \bmod \frac{2\pi}{12})$$

Els moments del dia en els quals no és possible saber l'hora si les dues broques tenen la mateixa llargada són els parells (α, β) tals que el parell (β, α) també és una hora vàlida. Per trobar aquests punts, podem fer-ho gràficament. Considerem el gràfic α-β.

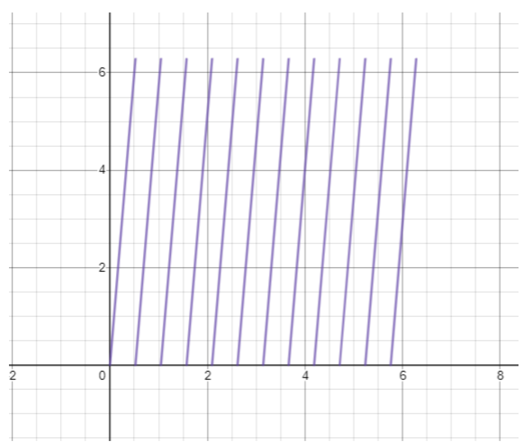

Figure 1: Gràfic α-β d'un període de 12 hores.

El problema es redueix a trobar quins punts d'aquesta gràfica també estan al grafic que resulta d'intercanviar els eixos, el gràfic β-α. Observem que cada segment (hora) del gràfic α-β talla 12 vegades amb el gràfic β-α, excepte l'últim, que talla 11 vegades (la dotzena té lloc quan $\alpha = 2\pi$).

Tanmateix, no hem de considerar els punts on $\alpha = \beta$, ja que en aquests sí que és possible distingir l'hora. Observem que al llarg de una volta del rellotge hi ha 11 punts d'aquests. Així doncs, al llarg del dia no es podrà saber l'hora $2 \times (12^2 - 1 - 11) = 264$ vegades.