Problema 121.

Egretta Garzetta

April 2020

Fixem un $n > 2$. Suposem que existeixen enters positius a, b, c tals que $a^n + b^n = c^n$.

Suposem que $\gcd(a, b) = k > 1$. Existeixen enters positius a', b' tals que $a'k = a$ i $b'k = b$ i $\gcd(a', b') = 1$. Llavors es cumpleix que $k^n(a'^n + b'^n) = c^n$, el que implica que $k^n|c^n$ i en consequència $k|c$. Existeix c' tal que $c'k = c$ i $a'^n + b'^n = c'^n$. Llavors, com que per enters positius a, b, c tals que $a^n + b^n = c^n$, i $\gcd(a, b) > 1$ existeixen enters positius a', b', c' tals que $a'^n + b'^n = c'^n$ amb a' i b' coprimers, per demostrar el teorema de Fermat podem suposar que a i b son coprimers.

Ara suposem que $\gcd(a, c) = k > 1$. Igual que abans, $k|b$, però com hem suposat que a i b son coprimers, això és una contradicció. Així doncs podem suposar que a i c son coprimers, i anàlogament que b i c son coprimers.

Ara tenim a^n, b^n i c^n que cumpleixen les hipótesis de la conjectura del Roura. Tenim que

$$c^n < \mathrm{rad}(a^n b^n c^n)^2 = \mathrm{rad}(abc)^2 \leq (abc)^2 < c^6.$$

La primera desigualtat és deguda a la conjectura d'en Roura. La igualtat la podem afirmar ja que per un primer p, $p|k \iff p|k^n, \forall n > 0$. La segona desigualtat és consequència de que $\mathrm{rad}(k)|k$. La tercera desigualtat és deguda a que a, b i c son enters positius, llavors si $a^n + b^n = c^n$, tenim $a^n < c^n$ i en particular $a < c$. Anàlogament $b < c$.

Finalment, com que clarament $c > 1$, la desigualtat $c^n < c^6$ demostra el Teorema de Fermat per qualsevol $n > 5$. Podem suposar que els casos més petits son coneguts.