XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 28 d'abril de 2020

Bloc III - Més fàcils que Càlcul I

163. VAP VEP VIP VOP VUP

L'Oriol Navarro té una matriu A, obtinguda de permutar les columnes de la matriu identitat de mida n. Quins són els seus VAPs i VEPs?

Sigui $\sigma \in \mathcal{S}_n$ la permutació que hem aplicat a les columnes de la identitat per obtenir la matriu A. Observem que, notant per e_i un vector de la base canònica, $Ae_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$. Sigui $c = (x_1, \dots, x_l)$ un dels cicles de la descomposició en cicles disjunts de σ. Sigui $\lambda \in \mathbb{C}$, i considerem el vector $v = e_{x_1} + \lambda e_{x_2} + \cdots + \lambda^{l-1} e_{x_l}$. Aleshores, tenint en compte que $\sigma^{-1}(x_i) = x_{i-1}$ (de forma cíclica), obtenim

$$Av = e_{x_l} + \lambda e_{x_1} + \cdots + \lambda^{l-1} e_{x_{l-1}} = \lambda v + (1 - \lambda^l) e_{x_l}.$$

Així doncs, si $\lambda^l = 1$, v és vector propi de A de valor propi λ. Per tant, donant a λ el valor de les arrels l-èssimes de la unitat, obtenim un total de l VEPs linealment independents, ja que són de VAPs diferents. A més, si anomenem $F_c \subseteq \mathbb{R}^n$ al subespai que generen, tenim $F_c \subseteq [e_{x_1}, \dots, e_{x_l}]$, però en ser de la mateixa dimensió tenim la igualtat. Aleshores, si repetim el mateix procés per als altres cicles de σ, obtenim un conjunt de n VEPs de A, que generen el subespai

$$\sum_{c \in \sigma} F_c = \sum_{c \in \sigma} \sum_{x_i \in c} [e_{x_i}] = \sum_{j=1}^{n} [e_j] = \mathbb{R}^n,$$

on les sumes són de subespais vectorials. Per tant, els VEPs de A anteriorment descrits formen base de $\mathbb{R}^n$.

Els VAPs són les arrels k-èssimes de la unitat per cada k tal que hi hagi un cicle de longitud k. Donat un VAP associat a un cicle, els VEPs són els que tenen components zero als índexos que no pertanyen al cicle i potències del VAP a la resta en l'ordre del cicle que estem considerant.