EGRETTA-GARZETTA

175. Desigualtat triangular En Barrero està molt emocionat i diu en veu alta "Let me to consider a much interesting problem that comes to my mind". El problema diu el següent: "Anomenem S l'àrea d'un triangle i P el seu perímetre. Trobeu la mínima constant γ que fa la inequació $S \leq \gamma P^2$ certa per a tot triangle del pla afí." Sabríeu resoldre el problema?

Diguem p al semiperímetre del triangle ($2p = P$). Aleshores, per la fórmula d'Heron, tenim

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

on a, b, c són els costats del triangle. Substituint en l'inequació, obtenim

$$S \leq \gamma P^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \leq 4\gamma p$$

Aleshores, si fem servir la desigualtat aritmètica geomètrica (per la desigualtat triangular, $p-a, p-b, p-c$ són sempre quantitats positives)

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Per tant substituint per trobar el mínim γ obtenim

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \leq \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{p}} = \frac{p}{3\sqrt{3}} \leq 4\gamma p \implies \frac{1}{12\sqrt{3}} \leq \gamma$$

I hem trobat el mínim valor de γ, que és $\boxed{\dfrac{1}{12\sqrt{3}}}$.

Aquest mínim s'assoleix quan el triangle és equilàter (ja que, en la desigualtat de mitjanes, la igualtat s'assoleix quan tots els valors són iguals). En efecte, es compleix

$$a = b = c \implies S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{12\sqrt{3}}(3a)^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}P^2$$