

XXIV Marató de Problemes

Pelotazos

Abril 2020

Problema 244. Com Hattori el Ninja

Veiem que $2 \sum a_n < \infty$, llavors $\infty > a_1 + \sum (a_n + a_{n+1}) > a_1 + \sum 2\sqrt{a_n a_{n+1}} > \sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$, utilitzant la desigualtat de mitjanes, amb el que demostrem el demanat.

El recíproc és fals. Un contra exemple és la serie definida com $a_n = 1$ si n és parell i $a_n = 2^{-n}$ en cas contrari. $\sum a_n$ divergeix ja que el limit de a_n no és 0. Per altra banda tenim que $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}} < \sum (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}$ que és convergent ja que és la suma de una sèrie geométrica convergent per ser $\sqrt{2} > 1$.