Marató de problemes: Problema 328

Francesco Virgolini

Fiñáuuuuu

(a) El fet que tots els subgrups propis d'un grup siguin cíclics no implica que el grup sigui cíclic. Un exemple és el grup dihedral D_2, el grup d'ordre 4 donat per la taula següent:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Els subgrups propis de D_2 són $\{e\}$, $\{e,a\}$, $\{e,b\}$ i $\{e,c\}$, que són tots cíclics. En canvi, D_2 no ho és.

(b) Volem demostrar que un grup d'ordre n és cíclic si i només si per cada $d \mid n$, existeix un únic subgrup d'ordre d.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sigui G un grup cíclic d'ordre n. Aleshores, $\exists a \in G$ tal que $G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. A més, tots els seus subgrups seran cíclics. Sigui d un divisor de n tal que $n = kd$. Aleshores el subgrup $H = \langle a^k \rangle$ és d'ordre d, ja que $(a^k)^d = a^n = e$. Per veure que és únic, sigui H' un altre subgrup d'ordre d. H' ha d'estar generat per un cert $a^m \in G$ d'ordre d, amb $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Aleshores, $n \mid md \implies k \mid m \implies a^m \in H \implies H' \leq H \implies H' = H$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sigui $\alpha(d)$ el nombre d'elements de G d'ordre d. En primer lloc, veurem que la hipòtesi implica que $\alpha(d) \leq \phi(d)$ per tot $d \mid n$. Sigui d un divisor de n tal que $\alpha(d) > 0$ (altrament $\alpha(d) \leq \phi(d)$ trivialment). Aleshores, existeix un $x \in G$ tal que $\langle x \rangle$ és un subgrup cíclic d'ordre d. Observem que un element $y \in \langle x \rangle$ tindrà ordre d sii $y = x^m$ amb $\operatorname{lcm}(d, m) = dm \iff \gcd(d, m) = 1$, de manera que hi ha $\phi(d)$ elements d'ordre d en $\langle x \rangle$. Per altra banda, no hi ha cap element de fora de $\langle x \rangle$ d'ordre d, ja que sigui $y \in G$ un element d'ordre d, aleshores per hipòtesi $\langle y \rangle = \langle x \rangle \implies y \in \langle x \rangle$. Per tant, en aquest cas, $\alpha(d) = \phi(d)$.

Per Lagrange, tot ordre ha de dividir la mida del grup, de manera que

$$n = \sum_{d \mid n} \alpha(d) \leq \sum_{d \mid n} \phi(d) = n$$

I donat que tenim la desigualtat $\alpha(d) \leq \phi(d)$ per cada terme, tenim que $\alpha(d) = \phi(d)$ per tot $d \mid n$, i això implica en particular que $\alpha(n) \geq 1 \implies$ hi ha un element d'ordre $n \implies G$ és cíclic.