

XXIV Marató de Problemes - Fem Piñaki

Problema 490: Flipant en colors

Durant la quarantena, la generació de Festes del 2000 (un minut de silenci per FMEstes99) està començant a triar els colors de la seva samarreta de l'any que ve. Tenen $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ colors diferents i pinten cada punt del pla (\mathbb{R}^2) d'un color d'entre els k colors diferents. Han decidit que quan algú trobi un rectangle amb els quatre vèrtexs pintats del mateix color, agafaran aquell color per la samarreta de festes. Però existeix tal rectangle?

Solució:

Dibuixem en el pla una quadrícula amb $k+1$ línies horitzontals i $k^{k+1}+1$ línies verticals i ens fixem en els colors dels punts on es creuen les línies. Pel principi del colomar sabem que a cada columna (línia vertical), com hi ha $k+1$ punts i k colors, hi haurà com a mínim dos punts del mateix color.

De la mateixa manera, si hi ha k colors, hi haurà k^{k+1} disposicions diferents de colors dels $k+1$ punts de les columnes. Per tant, pel principi del colomar hi haurà dues columnes amb exactament la mateixa disposició. És a dir, hi haurà dues línies de la graella amb dos punts del mateix color en la mateixa posició: haurem trobat un rectangle.