XXIV Marató de Problemes - Fem Piñaki

Problema 1912: Mà esquerra, mà dreta.
L'Enric Ventura vol posar en un tauler d'escacs convencional un rei i n cavalls, de manera que cap peça amenaci cap altra peça. Vol saber quin és el màxim nombre n de cavalls que hi pot posar. La seva mà esquerra diu "Me cagun l'hòstia merda, si està clar que ha de sortir això"; però la seva mà dreta no sap resoldre el problema. El podríeu ajudar? (fent servir la mà dreta, és clar)

Solució:

Mirem primer que en un taulell d'escacs hi podem posar com a màxim 32 cavalls. Per fer-ho agrupem les caselles del taulell per parelles, de manera que un cavall en una de les caselles amenaçi la seva parella. Això pot fer-se de moltes maneres. Per exemple, pel rectagle de 2×4 superior a l'esquerra podríem fer aquestes parelles: ((1,1),(3,2)), ((1,2),(3,1)), ((2,1),(4,2)), ((2,2),(4,1)); i reproduïr-les igual als altres 7 rectangles de la mateixa mida, fins tenir aparellat tot el taulell. Aleshores sabem que si a una de les caselles de cada parella hi ha un cavall, no n'hi haurà una a l'altra. És a dir, al taulell hi poden haver com a màxim $\frac{8^2}{2} = 32$ cavalls.

Veiem ara com, si afegim un Rei al taulell, només poden haver-hi 30 cavalls al taulell. Notem que el Rei al col·locar-lo provoca que no pugui haver-hi cap cavall ni al seu voltant. Distingim entre dos casos:

Cas 1: El Rei no està en una cantonada. Aleshores podem reordenar les parelles (Annex) de manera que entre les 6 o 8 caselles a les que el Rei amenaça hi hagi dues parelles (on no hi podrà haver cap cavall). D'aquesta manera sabem que hi haurà els cavalls que hi càpiguen a la resta de parelles, que són 30 com a màxim (tot i no ser una bona fita per aquest cas).

Cas 2: El Rei està en una cantonada. Notem que aleshores segur que no hi haurà cavalls ni en les tres caselles adjacents ni en les dues posicions en les que, si n'hi hagués un, el rei estaria amenaçat (totes marcades amb una 'x' a la taula). Deixant apart dues caselles, podem trobar 28 noves parelles com les que hem construït abans amb les 56 que queden, de la següent manera (les caselles aparellades tenen el mateix número):

R	x		1	2	3	5	4
x	x	x	6	7	1	2	3
11	x		9	15	6	4	5
10	13	11	12	14	7	16	22
18	12	10	8	9	15	14	17
13	8	18	20	21	17	22	16
24	20	19	23	28	25	26	27
19	23	24	21	26	27	28	25

Hi haurà com a màxim un cavall per parella: 28 cavalls. Hem d'afegir, però, els dos que podem posar en les caselles que hem deixat apart. És a dir, podem col·locar fins a 30 cavalls.

Per tant, hem trobat que com a màxim hi haurà 30 cavalls. Per acabar la demostració veiem que existeix una configuració amb $n = 30$:

R		C		C		C	
			C		C		C
C		C		C		C	
	C		C		C		C
C		C		C		C	
	C		C		C		C
C		C		C		C	
	C		C		C		C

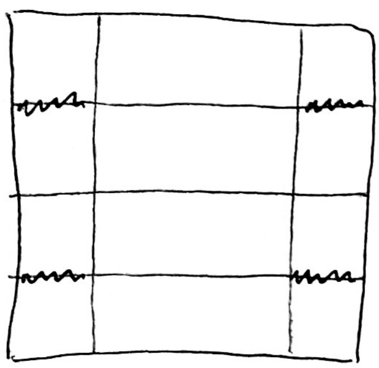
Annex:

Hem vist com, per un bloc 2×4 podem agafar les parelles així:

1	3	2	4
2	4	1	3

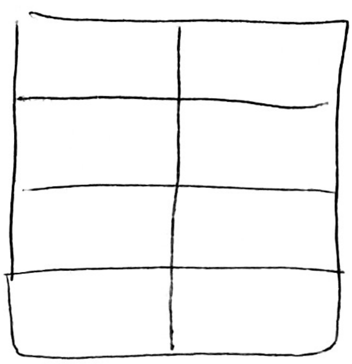
Suposem que el rei no està en una cantonada.

Per tant, si el rei està en una de les dues columnes centrals fem les parelles així (amb aquests blocs):



Com el rei cobreix 2×3 o 3×3 caselles, sí o sí cubrirà dues parelles, ja que cobrirà un semi bloc 2×3 d'algun bloc 2×4.

En canvi, si el rei està en qualsevol de les altres columnes fem les parelles amb aquests blocs:



Per la mateixa argumentació d'abans el rei cobreix dues parelles.