XXIV Marató de Problemes

Mamadísimos, 30 d'abril de 2020

Bloc IV - Passem l'equador!

2830. L'imitació

L'Iñaki viu al límit i ha perfeccionat les seves imitacions del professorat de Càlcul 1. Ara bé, tan bé no els imitarà si no sap resoldre el límit següent!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n}.$$

Podríeu ajudar-lo?

Solució. Dividint per n^n el numerador i el denominador, obtenim:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2+\cdots+n^n}{1^n+2^n+\cdots+n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{n}+1}{(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n}{n})^n}$$

Ara calcularem el límit del numerador i el del denominador i si els dos existeixen, el límit del quocient serà el quocient de límits.

El límit del numerador és 1 ja que podem fitar-lo pels 2 costats per funcions de límit 1 i aplicar el teorema del sandvitx. Definim, per a cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = 1+\frac{2}{n}, \quad g(n) = \frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{n}+1, \quad h(n) = 1$$

Clarament, $g(n) \geq h(n)$ ja que el primer terme té més sumands i són positius. Per altra banda,

$$f(n) = 1+\frac{2}{n} = 1+\frac{1}{n}+n\cdot\frac{1}{n^2} \geq 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^{n-1}} = g(n).$$

Per tant, com que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} h(n) = 1 \quad \text{i} \quad f(n) \geq g(n) \geq h(n),$$

pel teorema del sandvitx obtenim que $\lim_{n\to\infty} g(n) = 1$.

Pel denominador, procedim similarment. Considerem la funció $t(x) = xe^{\frac{a}{x}}$ on a és un valor fixat. Clarament $t(x)$ és contínua en $(\frac{1}{2},\infty)$ per ser producte, composició i divisió (sense que el denominador s'anul·li) de funcions contínues en aquest interval. Aleshores podem calcular la primera derivada de $t(x)$: $t'(x) = e^{\frac{a}{x}} + xe^{\frac{a}{x}}(-\frac{a}{x^2}) = e^{\frac{a}{x}}(1-\frac{a}{x})$. Resolent $t'(x) = e^{\frac{a}{x}}(1-\frac{a}{x}) = 0 \iff (1-\frac{a}{x}) = 0 \iff x = a$, trobem que en $x = a$ hi ha un punt crític de la funció. Calculant el valor de la segona derivada en aquest punt trobem: $t''(x) = e^{\frac{a}{x}}(\frac{a}{x^2})+e^{\frac{a}{x}}(\frac{-a}{x^2})(1-\frac{a}{x}) = e^{\frac{a}{x}}(\frac{a^2}{x^3})$. Aleshores $t''(a) = \frac{e}{a} > 0$ perquè $a > \frac{1}{2} > 0$. Per tant, el punt crític correspon a un mínim i tenim que per $x \in (\frac{1}{2},\infty)$, $t(x) = xe^{\frac{a}{x}} \geq t(a) = ae$. Dividint a cada banda d'aquesta desigualtat per ex, arribem a $\frac{a}{x} \leq e^{\frac{a}{x}-1}$. Elevant a x cada banda, $(\frac{a}{x})^x \leq e^{a-x}$ que és cert per $x \in (\frac{1}{2},\infty)$. En particular, si $x = n \in \mathbb{N}_{>0}$ i fem el canvi de variable $b = x-a = n-a$, $(\frac{n-b}{n})^n \leq e^{-b}$.

Ara podem definir $g(n) = (\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \cdots + (\frac{n}{n})^n$ i utilitzant la desigualtat per $b = 0, 1, \ldots n-1$, tenim:

$$g(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n \leq e^{1-n} + e^{2-n} + \ldots + e^{-1} + 1 = f(n)$$

En la última igualtat, definim així $f(n)$. Aleshores, tenim:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} e^{1-n} + e^{2-n} + \ldots + e^{-1} + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$$

A continuació, anem a fitar inferiorment $g(n)$ per una altra successió $h(n)$ que tendeixi al mateix límit, i així poder aplicar el criteri del sandvitx i concloure el límit de $g(n)$. Així, considerem un natural $c = c(n) \leq n$ que fixarem més endavant, i observem que podem fitar inferiorment $g(n)$ eliminant $n - c$ sumands positius:

$$g(n) \geq \left(\frac{n}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-c}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{c} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

Així doncs, si definim

$$h(n) = \sum_{k=0}^{c} \left(e^{-k} - \frac{k^2}{n}\right),$$

tindrem que $g(n) \geq h(n)$, en virtut de la desigualtat

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \left(e^{-k} - \frac{k^2 + k^3}{n}\right),$$

que és vàlida per a tot $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq k \leq n$. Aquesta última es pot provar usant la fórmula de Taylor. Vegem-ho:

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq 1 - k + \frac{n-1}{n}\frac{k^2}{2} - \frac{(n^2 - 3n + 2)}{n^2}\frac{k^3}{6},$$

i per l'altra banda

$$e^{-k} \leq 1 - k + \frac{k^2}{2} \implies e^{-k} - \frac{k^2 + 2k^3}{n} \leq 1 - k + \frac{n-2}{n}\frac{k^2}{2} + \frac{n^2 - 6n}{n^2}\frac{k^3}{6} \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

Així doncs, avaluant l'expressió de $h(n)$, tenim

$$h(n) = \sum_{k=0}^{c} e^{-k} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{c} k^2 + k^3 = \frac{1 - e^{-c-1}}{1 - e^{-1}} - \frac{c(c+1)(2c+1)}{6n} - \frac{c^2(c+1)^2}{4n}.$$

Així doncs, si prenem $c = c(n)$ de manera que

$$\lim_{n\to+\infty} c(n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c(n)^4}{n} = 0,$$

com per exemple $c(n) = \lfloor \sqrt[5]{n} \rfloor$, obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

En conclusió, hem trobat funcions f, h tals que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} h(n) = \frac{e}{e-1} \quad \text{i} \quad f(n) \geq g(n) \geq h(n),$$

i pel criteri del sandvitx, obtenim que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \dfrac{e}{e-1}$. Així doncs, obtenim finalment que el límit demanat és el qüocient de límits, que hem determinat per separat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 + \cdots + n^n}{1^n + 2^n + \cdots + n^n} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Esperem haver ajudat a perfeccionar les imitacions de l'Iñaki, i que no s'hagi atipat massa amb tant de sandvitx.