Problema 352 (Jordi Pesao)

a)

Siga f l'endomorfisme de $\mathbb{Z}_2^2$ que té per matriu en base canònica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Llavors 1 i 0 són valors propis de f, que són els dos elements del cos $\mathbb{Z}_2$

b)

Sobre $k = \mathbb{R}$, l'endomorfisme d'$\mathbb{R}^2$ que en base canònica té la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ no té cap valor propi, ja que el seu polinomi característic $x^2 + 1$ no té arrels a $\mathbb{R}$. Amb $k = \mathbb{C}$ tot endomorfisme d'un espai vectorial de dimensió finita té almenys un valor propi, ja que al ésser un cos algebraicament tancat el polinomi característic té sempre una arrel.

En dimensió infinita pot ser que no hi hagi valors propis. Considerem l'espai vectorial dels polinomis d'una variable z amb coeficients complexos i l'endomorfisme $f(P) = z \cdot P$ (clarament és lineal). Aquest endomorfisme no té cap valor propi ya que el terme amb coeficient no zero amb menor grau de P té coeficient 0 a $f(P)$, per tant si fora $f(P) = \lambda P$ la única opció possible seria $\lambda = 0$, però per tot $P \neq 0$ es té que $f(P) \neq 0$, per tant 0 no és un valor propi i no hi ha cap valor propi.