XXIV Marató de Problemes

Pelotazos

Abril 2020

Problema 706. On s'amaguen els nostres complexos?

Sigui $w = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ l'arrel n-essima de la unitat.

$$P(w) + \cdots + P(w^n) = P(1) + \cdots + P(w^{n-1}) =$$

$$= na_0 + a_1(1 + w + \dots w^{n-1}) + a_2(1 + w^2 + ...(w^2)^{n-1}) + \dots a_n(1 + w^n + \dots (w^{n-1})^n) =$$

Com $w^k = 1$ si i nomes si $k \equiv 0 \mod n$,

$$= na_0 + a_1 \frac{w^n - 1}{w - 1} + a_2 \frac{(w^2)^n - 1}{w^2 - 1} \cdots + na_n = na_0 + na_n$$

Fent un càlcul similar, es comprova que si $w = e^{\frac{2\pi}{k}i}$ l'arrel k-èssima de la unitat (per a qualsevol k, no només $k = n$),

$$P(z) + P(wz) + \cdots + P(w^{k-1}z) = k(a_0 + a_k z^k + \dots) = kP_k(z)$$

Per tant, només queda comprovar que

$$\text{LHS} = \sup_{|z|<R} | P(z) + P(wz) + \dots P(w^{k-1}z) | \leq k \sup_{|z|<R} | P(z) | = \text{RHS}$$

Aplicant la desigualtat triangular a la banda esquerra, i que el suprem de la suma es més petit que la suma de suprems.

$$\text{LHS} \leq \sup_{|z|<R} | P(z) | + \sup_{|z|<R} | P(wz) | + \dots \sup_{|z|<R} | P(w^{k-1}z) |$$

Ara només queda provar que per a tot $0 \leq p < k$

$$\sup_{|z|<R} | P(w^p z) | \leq \sup_{|z|<R} | P(z) |$$

Sabem que $| w^p z | = | z |$ per què multiplicar per una arrel de la unitat només ens gira el z, sense canviar el seu mòdul. Aleshores, com que la regió on avaluem el suprem és un disc, és trivial comprovar que sempre és dona la igualtat. Sumant aquestes igualtats per a tot p, obtenim LHS $\leq$ RHS, com voliem.