Problema 955.

Egretta Garzetta

April 2020

Primer de tot, demostrarem un lema que ens serà útil més endevant.

Lema 1. *Per tot* $k \in \mathbb{N}$[1]*, existeix* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\pi(n)k < n$*.*

Demostració. Sabem pel Teorema dels nombres primers que $\pi(n) \sim \frac{n}{logn}$, la qual cosa implica que $\pi(n) = o(n)$. Per la definició de "o-petita", tenim que per tot $k \in \mathbb{N}$ existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(n)k < n$. □

Donat un $k \in \mathbb{N}$, definim la funció següent:

$$\begin{aligned} \delta_k : \mathbb{N}_{\geq 2} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \delta_k(n) &\longmapsto \pi(n)k - n. \end{aligned}$$

Fixem un natural $k > 2$. Observem que $\delta_k(2) = k - 2$. Per $n > 2$ primer, $\delta_k(n) = \delta_k(n-1) + k - 1$, i per $n > 2$ no primer, tenim que $\delta_k(n) = \delta_k(n-1) - 1$.

Per el Lema 1, sabem que existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_k(m) < 0$, i $m > 2$ ja que $\delta_k(2) = k - 2 > 0$. Llavors, existeix $n_0 \in (2, m]$ tal que n_0 és el nombre més petit del interval tal que $\delta(n_0) < 0$. Considerem dos casos:

1. n_0 és primer. Llavors $\delta_k(n_0 - 1) = \delta_k(n_0) - k + 1 < 0$, la qual cosa no pot ser ja que hem suposat que n_0 era el nombre més petit tal que $\delta_k(n_0) < 0$.

2. n_0 no és primer. Llavors, $0 > \delta_k(n_0) = \delta_k(n_0 - 1) - 1$, i, com que $\delta_k(n_0 - 1) \geq 0$, ha de ser $\delta_k(n_0 - 1) = 0$.

Hem demostrat que per tot $k > 2$ existeix un n tal que $\pi(n)k = n$. És clar que per dos valors de k diferents, aquest n és diferent, ja que $k_1 \neq k_2 \implies \pi(n)k_1 \neq \pi(n)k_2$. Així doncs existeixen infinits enters positius n tals que $\pi(n)|n$.

[1] El 0 no és natural.