Problema 1786

Egretta Garzetta (amb modificacions dels organitzadors)

April 2020

a)

No és cert, considerem el conjunt de $\mathbb{R}$ següent: $[0, \infty)$. Aquest conjunt és convex i no fitat, però l'única recta a $\mathbb{R}$, $(-\infty, +\infty)$ no pertany al conjunt.

b)

Aquest resultat sí que és cert.

Sigui $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt de $\mathbb{R}^n$ convex i no fitat. Sigui $M \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunt format per totes les combinacions lineals de punts d'A. Òbviament $A \subseteq M$, així que podem considerar el interior del conjunt A dins de M, l'anomenarem I.

Lema 1. $I \neq \emptyset$

Demostració. Considerem una base afí $\{p_0, \cdots, p_k\}$ de l'espai M formada per punts linealment independents de A. El punt $p = \frac{p_0 + \cdots + p_k}{k+1}$ és una combinació convexa dels punts de A i per tant pertany a A i també pertany a M. Clarament p és interior a l'embolcall convex E de $\{p_0, \cdots, p_k\}$, i degut a que $E \subseteq A$ llavors $p \in I$. $\square$

Ara considerem un punt $p \in I$ qualsevol. Considerem la bola de centre p i radi i per algun $i \in \mathbb{N}$[1]. Degut a que el conjunt és no fitat, existeix un punt $q_i \in A$ fora d'aquest conjunt. Considerem el vector $u_i := \frac{q_i - p}{||q_i - p||}$. Així doncs hem creat una successió $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vectors de longitud 1. Els vectors de longitud 1 de $\mathbb{R}^k$ estan amb bijecció amb la esfera $S^{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k$, que és tancada i fitada i en concret seqüencialment compacta. Llavors existeix una successió parcial convergent de $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Anomenem u al límit d'aquesta succesió. Observem que u és una direcció de M.

Considerem la semirecta $p + \lambda u$, $\lambda > 0$. Demostrarem que aquesta semirecta pertany a A per contradicció, així que suposem que aquesta semirecta no pertany a A.

Degut a que $p \in I$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que per a tota direcció v de S^{k-1}, es té $p + \varepsilon v \in A$. Sigui $L > 0$ un nombre real tal que $p + Lu \notin A$. Sigui v_i la successió parcial que convergeix a u. Existeix un índex n_0 tal que per tot $n > n_0$, si recordem la notació dels q_i, $\|q_i - p\| > 2L$. Considerem $a_n = p + 2Lv_n \in A$[2], el límit d'aquesta successió és $a = p + 2Lu$. Necessàriament, $\|a_n - a\| < \varepsilon/2$ per a n suficientment gran. Llavors, $p + 2L(u - v_n)$ pertany a A, ja que p és interior. Per tant, $p + Lu = \frac{1}{2}\left((p + 2Lv_n) + (p + 2L(u - v_n))\right) \in A$, en contracdicció amb la hipòtesi.

[1] 0 no és natural.

[2] Aquests elements estan dins de A ja que A és convex, i a_n està dins la recta determinada per p i q_n.